

**MEMORIAL**  
DE  
**Ingenieros del Ejército**

---

**COLECCIÓN DE MEMORIAS**

---

**QUINTA ÉPOCA.-TOMO LII**  
(XC DE LA PUBLICACIÓN)

---

**AÑO 1935**

**MADRID**  
«MEMORIAL DE INGENIEROS DEL EJÉRCITO»

---

**1935**



# INDICE DE MEMORIAS

PUBLICADAS POR EL

MEMORIAL DE INGENIEROS DEL EJÉRCITO

en el año de 1935

---

**Las propiedades piezo-eléctricas del cuarzo y sus aplicaciones.**

Por el teniente coronel de Ingenieros D. GUSTAVO DE MONTAUD.—Con 28 páginas y 20 figuras.

**Propagación y penetración de las ondas electromagnéticas.**

Por el comandante de Ingenieros D. RICARDO ESCUDERO. —  
Con 172 páginas y 79 figuras.



**GUSTAVO DE MONTAUD**  
**TENIENTE CORONEL DE INGENIEROS**

---

**Las propiedades  
piezo - eléctricas del cuarzo  
y sus aplicaciones**



---

**PUBLICACIÓN DEL «MEMORIAL  
DE INGENIEROS DEL EJÉRCITO»**  
-:- -:- MADRID, 1955 -:- -:-

---

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 354

LECTURE 1



LECTURE 2

LECTURE 3

---

## I. Preliminares.

1. *Cristales de cuarzo*.—Los cristales naturales de cuarzo están formados, cuando son completos, por un prisma exagonal, terminado en sus extremos por pirámides. Pero los que se encuentran más comunmente en la Naturaleza están asociados, y entonces cada ejemplar forma un prisma corto, roto por uno de sus extremos y terminado por una pirámide en el otro. Algunos cristales presentan facetas, *a* (fig. 1), en los vértices de unión del prisma con la pirámide,

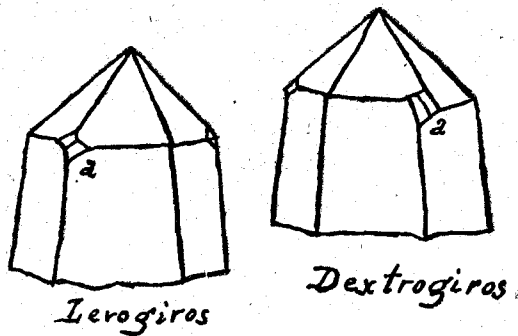


Fig. 1

el sentido de cuya inclinación determina su clasificación en dextrogiros y levogiros, por la propiedad que tiene un trozo del cristal, de caras perpendiculares a su eje óptico, de hacer girar el plano de polarización de la luz hacia la derecha o hacia la izquierda.

La tonalidad de los cristales de cuarzo es muy variada: desde los incoloros hasta aquellos de color azul oscuro. Los colores son

debidos a la presencia de sales en la masa, siendo preferibles los primeros para las aplicaciones piezo-eléctricas, aunque algunos ejemplares coloreados han dado resultados satisfactorios.

La fórmula química del cuarzo es  $Si O_2$ ; su densidad a  $0^\circ$  centígrados igual a 2,65, y ocupa el séptimo lugar en la escala de dureza de *Mohs*.

2. *Propiedades piezo-eléctricas* (1).—En 1880, Pedro y Jacobo *Curie* descubrieron que, en un condensador de dieléctrico formado por una placa de cuarzo, convenientemente tallada, se producen cargas eléctricas en las armaduras cuando se somete el cristal a fuerzas mecánicas. Poco después, *Lippmann* demostró que debía producirse el fenómeno inverso, es decir, existir deformaciones mecánicas cuando se aplica una diferencia de potencial entre las armaduras del condensador; esta presunción teórica fué después comprobada experimentalmente por los hermanos *Curie*.

Si consideramos, en un cristal de cuarzo (fig. 2), la sección recta  $MN$ , perpendicular al eje óptico, de forma exagonal como es sabido, existen en ella (fig. 3) tres ejes,  $AB$ ,  $CD$  y  $EF$ , paralelos a los lados del exágono, que se denominan *ejes eléctricos*.

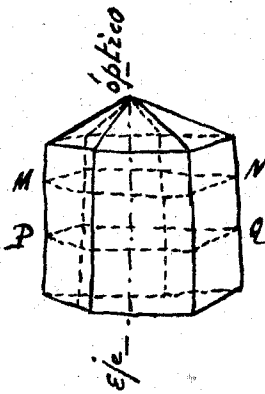


Fig. 2

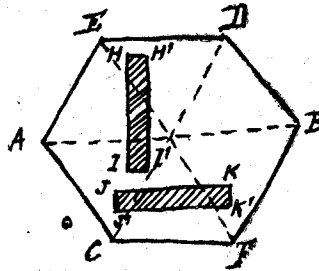


Fig. 3

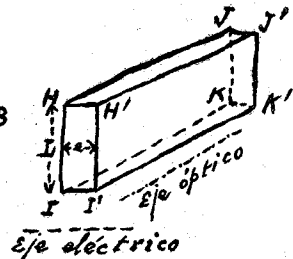


Fig. 4

De un trozo del cristal obtenido cortándole según las secciones rectas paralelas  $MN$  y  $PQ$  se pueden sacar placas de las direcciones que se deseen, pero desde el punto de vista de las aplicaciones piezo-eléctricas del cuarzo, la práctica ha demostrado que sólo son eficientes las placas de caras paralelas o perpendiculares a los ejes

(1) *Piezo*, del griego  $\pi\epsilon\iota\sigma\epsilon\tau\upsilon$ , comprimir.



eléctricos, es decir, aquellas cuyas secciones rectas se han representado por los rectángulos rayados  $HH'II'$ ,  $JJ'KK'$  en la figura 3. Es evidente que las dos caras activas se tienen en una sola placa, la proyectada en  $HH'II'$ , por ejemplo, sobre la que pueden apoyarse electrodos en las caras proyectadas en  $HI$ ,  $H'I'$  perpendiculares al eje eléctrico  $AB$  y en las caras proyectadas en  $HH'$ ,  $II'$ , paralelas al mismo eje.

Se dice que las placas cuyos electrodos se apoyan en caras perpendiculares a los ejes eléctricos están talladas en *onda larga* y en *onda corta* aquellas cuyas caras activas son paralelas a dichos ejes.

Considerando una placa de sección recta  $HH'II'$ , representada en perspectiva en la figura 4, las propiedades eléctricas del cuarzo pueden enunciarse, según *Curie*, del modo siguiente:

a) Si se comprime el cristal normalmente a las caras  $HIJK$ ,  $H'I'J'K'$ , es decir, si se ejerce una acción mecánica en el sentido de un eje eléctrico (el  $AB$  de la figura 3 en este caso), se obtiene en estas caras un desprendimiento de electricidad dado por la fórmula:

$$q = kf \quad [1]$$

$q$ , cantidad de electricidad.

$f$ , fuerza.

$k$ , constante numérica.

b) Recíprocamente, si se aplica una diferencia de potencial  $V$  entre las mismas caras, el cuarzo se dilata (o se contrae) en la dirección del eje eléctrico en una cantidad  $\delta$  tal que:

$$\delta = kV \quad [2]$$

$k$  es la misma constante numérica de la fórmula [1].

La placa se contrae (o se dilata), al mismo tiempo, en la dirección  $HI$ . La deformación se obtiene por la fórmula:

$$\delta' = k \frac{L}{e} V \quad [3]$$

$L$ , longitud  $HI$ .

$e$ , espesor  $HH'$ .

No hay ninguna modificación de tamaño en la dirección  $HJ$  del eje óptico.

c) Si se comprime o se dilata la placa en la dirección del eje óptico no se produce ningún desprendimiento de electricidad.

d) Si se aplica una diferencia de potencial entre las caras  $HIH'I'$  y  $JKJ'K'$ , perpendiculares al eje óptico, no se manifiesta ninguna deformación mecánica.

e) Si se comprime el cristal en una dirección normal a los ejes óptico y eléctrico, es decir, perpendicularmente a las caras  $HJH'J'$ ,  $IKI'K'$  se produce un desprendimiento de electricidad en las caras  $HIJK$ ,  $H'I'J'K'$ , dada por la relación:

$$q = -k \frac{L}{e} V \quad [4]$$

## II. Teoría.

3. *Frecuencia propia de vibración de una placa de cuarzo.*—Supongamos que la placa de cuarzo se coloca entre dos electrodos aplicados a las caras  $HIJK$ ,  $H'I'J'K'$  perpendiculares al eje eléctrico y que se les somete a una diferencia de potencial alterna [caso b)].

A cada alternancia de la tensión eléctrica corresponde en la placa una dilatación o una contracción en la dirección del eje eléctrico ( $I'P'$ ), acompañada de una contracción o dilatación, respectivamente, en la dirección del tercer eje  $HI$ ; la extensión de estas deformaciones es, desde luego, sumamente pequeña. Las que se producen en el sentido del eje eléctrico se llaman *vibraciones longitudinales* y las de sentido  $HI$  *vibraciones transversales*, correspondiendo un período propio a cada una de ellas.

Las deformaciones se producen, en la dirección del eje que se considere, con dos vientres de vibración en las extremidades del cristal y con un nodo en el centro. Es decir (fig. 5), considerando, por ejemplo, las vibraciones longitudinales, que la dilatación (o la contracción) es nula en todos los puntos del cristal situados en  $MN$  y aumenta progresivamente en extensión desde  $MN$  hasta  $HI$  o  $H'I'$ , en cuyos puntos es máxima. El cristal vibra, por consiguiente, en media onda.

Es fácil calcular la frecuencia de estas vibraciones propias. La velocidad de propagación de las deformaciones mecánicas en un cuerpo sólido se calcula por la fórmula:

$$v = \sqrt{\frac{M}{d}}$$

$M$ , módulo de Young.  
 $d$ , densidad.

La densidad del cuarzo puro es, como se dijo, igual a 2,65. Su módulo de elasticidad  $8 \times 10^{11}$  dinas por cm. aproximadamente, según Voigt; luego:

$$v = \sqrt{\frac{8 \times 10^{11}}{2,65}} = 5,5 \times 10^5 \text{ cm. por segundo} = 5,5 \times 10^6 \text{ mm. por segundo}$$

La longitud de onda, en milímetros, de una vibración de  $f$  ciclos por segundo:

$$\lambda = v \cdot T = \frac{[v]}{f} = \frac{5,5 \times 10^6}{f}$$

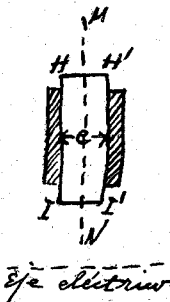


Fig. 5

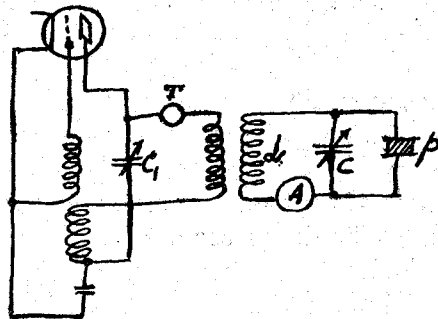


Fig. 6

Como el cristal vibra en media onda, si se expresa en milímetros el espesor  $e$ :

$$2e = \frac{5,5 \times 10^6}{f}$$

de donde:

$$f = \frac{2,75 \times 10^6}{e} \text{ ciclos-segundo} = \frac{2750}{e} \text{ Kc/s.} \quad [5]$$

La frecuencia de vibración de una placa de un milímetro de espesor es, pues, igual a 2.750 Kc/s., que corresponde a una longitud de onda de 110 metros.

Se puede, por tanto, decir, de un modo general, que la longitud de onda que corresponde en el aire a las vibraciones longitudinales es de 110 metros por milímetro de espesor.

Se ha indicado antes que las deformaciones de la placa son sumamente pequeñas. Esto es así excepto en el caso de que la frecuencia de la diferencia de potencial alterna aplicada a las armaduras sea igual a la frecuencia de alguna de las vibraciones propias del cristal, pues entonces se produce la resonancia y las deformaciones elásticas de la placa pueden ser de amplitud bastante grande. Para darnos cuenta exacta de cómo se produce la resonancia en este caso, supongamos que se envía a un galvanómetro balístico una pequeña cantidad de electricidad. Su aguja se separa de la posición de equilibrio con una velocidad  $v_0$ , toma una elongación  $e_0 = k v_0$  y adquiere un movimiento periódico amortiguado de tal modo que, algún tiempo después, vuelve a pasar por su posición de equilibrio con una velocidad del mismo sentido, menor que  $v_0$  a causa del amortiguamiento.

Sea  $\frac{v_0}{m}$ , siendo  $m > 1$ , esta velocidad. Si, en dicho instante, la aguja recibe un nuevo impulso, igual al inicial, la velocidad  $v_0$  que adquiere se suma a la  $\frac{v_0}{m}$  de que ya está dotada y la velocidad total es  $v_0 + \frac{v_0}{m}$ . Si el fenómeno se reproduce periódicamente, la velocidad de la aguja, a su paso por la posición de equilibrio, tiende hacia un valor límite:

$$v_0 \left( 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \dots \right) = \frac{v_0}{1 - \frac{1}{m}}$$

Se ve, por tanto, que si el amortiguamiento es pequeño, es decir, si  $m$  difiere poco de la unidad, que la velocidad final es muy grande,

así como la elongación máxima  $k \frac{v_0}{1 - \frac{1}{m}}$ , que será incomparable-

mente mayor que la elongación inicial  $k v_0$ .

Este ejemplo hace ver cómo acciones mecánicas susceptibles por sí mismas de producir sólo pequeños efectos pueden, si se reproducen periódicamente, provocar desplazamientos importantes, sobre todo

si el sistema oscilante sobre el cual obran es poco amortiguado, como le sucede al cuarzo. Se comprende que, sometido a oscilaciones de igual frecuencia que la suya propia, pueda sufrir deformaciones considerables susceptibles de provocar su rotura cuando la diferencia de potencial aplicada a las armaduras es demasiado grande.

Se ha visto antes que una placa de cuarzo, de caras perpendiculares a un eje eléctrico, tiene dos clases de vibraciones, las longitudinales y las transversales. Hay, pues, dos frecuencias de la diferencia de potencial capaces de producir la resonancia de la placa; estas frecuencias dependen del espesor  $e$  y de la longitud  $L$ . Pero el cuarzo puede vibrar también con los armónicos de estas dos vibraciones fundamentales y las frecuencias correspondientes a estos armónicos ocasionar también, por consiguiente, fenómenos de resonancia. Los fenómenos de resonancia mecánica que acabamos de estudiar repercuten sobre el circuito eléctrico que proporciona la diferencia de potencial alterna a las armaduras, como vamos a comprobar por medio de la siguiente experiencia.

Consideremos (fig. 6) un circuito oscilante formado por la inductancia de la bobina  $L$  y la capacidad del condensador  $C$ , con la placa de cuarzo  $p$  entre electrodos, en derivación. Variando la capacidad de  $C$  se pone al circuito oscilante aproximadamente en resonancia con una de las frecuencias de vibración fundamentales de la placa.

Se excita la inductancia  $L$  en acoplo débil por medio de un oscilador (heterodino) cuya longitud de onda pueda variarse rápidamente variando la capacidad de su condensador  $C_1$ . Si en el circuito oscilante del heterodino se ha intercalado un teléfono  $T$ , se percibe, en un momento dado, durante aquella variación, un sonido breve de altura variable.

El fenómeno se explica teniendo en cuenta que, en el momento en que la frecuencia del heterodino pasa por un valor igual al de la propia del cuarzo, éste se pone a vibrar mecánicamente; las vibraciones duran cierto tiempo, a causa del pequeño amortiguamiento del cuarzo y provocan, en el circuito  $LCp$ , oscilaciones eléctricas de la misma frecuencia. Como, durante este tiempo, la longitud de onda de las oscilaciones del heterodino ha cambiado, las vibraciones eléctricas del circuito  $LCp$  interfieren, en el circuito oscilante del heterodino, con las que en él se engendran, produciéndose batidos de baja frecuencia que dan lugar en el teléfono al sonido breve y de altura variable de que se ha hecho mención.

Si se ha montado, además, un amperímetro  $A$  en el circuito  $LCp$ , se ve que, al cambiar la frecuencia de las oscilaciones del heterodino, la intensidad de la corriente varía en función de la frecuencia, como se indica en la figura 7; al acercarse a la resonancia con el cuarzo, la corriente crece, pasa por un máximo y presenta después una caída brusca, ascendiendo luego otra vez.

El aumento (rama  $ab$ ) de la intensidad de la corriente en el circuito secundario se explica por la aproximación progresiva de la frecuencia de las oscilaciones inductoras a la propia del circuito.

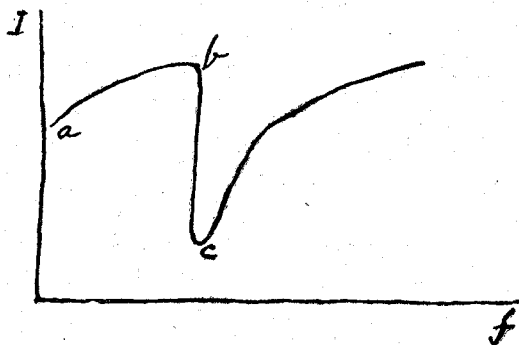


Fig. 7

En el momento en que la frecuencia de las oscilaciones eléctricas es igual a la propia de vibración mecánica del cuarzo éste entra en resonancia, sus vibraciones mecánicas adquieren gran amplitud y necesitan, para producirse, una gran cantidad de energía, que se obtiene a expensas de la eléctrica; el efecto es, pues, el mismo que si en dicho instante se intercalase una gran resistencia eléctrica en el circuito.

Se admite, por tanto, que la frecuencia de las oscilaciones que corresponde al mínimo (punto  $c$ ) es igual a la frecuencia de las vibraciones mecánicas; hemos, sin embargo, de ver pronto que, exactamente, no es así.

4. *Estudio analítico.*—Para estudiar analíticamente la cuestión, supongamos que se aplica una diferencia de potencial alterna a las armaduras de una placa de cuarzo. Parece, a primera vista, que este conjunto debe comportarse como una capacidad, pero el fenómeno de la vibración mecánica de la placa es causa de que la acción del dieléctrico de cuarzo sea más complicada. La aplicación de la diferencia de potencial que carga las armaduras provoca, en efecto,

al mismo tiempo, una deformación del cuarzo que produce, a su vez, en cada una de ellas, cierta cantidad de electricidad proporcional a dicha deformación y de signo contrario a la que resulta de la acción de la diferencia de potencial.

Dicho de otro modo: para producir una diferencia de potencial  $V$  entre las dos armaduras de un condensador de capacidad  $C$  es preciso proporcionarle una carga eléctrica  $q = CV$ ; pero si el dieléctrico del condensador es una placa piezo-eléctrica habrá que proporcionarle:

$$q = CV + q_1$$

siendo  $q_1$  la cantidad de electricidad necesaria para anular la de signo contrario producida como consecuencia de la deformación piezo-eléctrica, cantidad proporcional a esta deformación y, por tanto, a  $V$ .

En el caso de que la diferencia de potencial sea variable se tiene, como valor de la intensidad de la corriente, si se trata de un condensador ordinario:

$$i = C \frac{dV}{dt}$$

y en el caso del cuarzo piezo-eléctrico:

$$i = C \frac{dV}{dt} + q_1. \quad [7]$$

ecuación que demuestra que un condensador con dieléctrico de cuarzo puede ser considerado como un conjunto de dos circuitos en paralelo, siendo el primero el constituido por la placa de cuarzo entre sus armaduras y el segundo uno que vamos a tratar de definir.

Las deformaciones del cuarzo sometido a la acción de una diferencia de potencial periódica son bastante complejas, pero se las puede evidentemente asimilar a un movimiento pendular simple provocado por una fuerza  $kV$ . Designando por  $x$  la deformación, la ecuación del movimiento es:

$$\alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \ell \frac{dx}{dt} + \gamma x = kV \quad [8]$$

siendo  $\alpha$  proporcional al momento de inercia,  $\ell$  al amortiguamiento y  $\gamma$  a las fuerzas elásticas desarrolladas por la deformación.

Sabemos, por otra parte, que  $q_1$  es proporcional a la deformación  $x$ :  $q_1 = kx$ , poniendo:

$$i_1 = \frac{dq_1}{dt} \rightarrow x = \frac{q_1}{k} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{k} i_1 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Sustituyendo en [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{k} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\beta}{k} \cdot i_1 + \gamma \frac{q_1}{k} &= kV. \\ \frac{\alpha}{k^2} \cdot \frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{\beta}{k^2} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{\gamma}{k^2} i_1 &= \frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad [9]$$

Consideremos ahora un circuito oscilante constituido por una inductancia  $L_1$ , una resistencia pura  $R_1$  y una capacidad  $C_1$ , a cuyas bornas se aplica una diferencia de potencial  $V$ . Sabemos que:

$$V = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + v$$

con  $C_1 v = q$  y  $\frac{dq}{dt} = i$ , luego:

$$\frac{dV}{dt} = L_1 \frac{d^2i}{dt^2} + R_1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C_1} i \quad [10]$$

La comparación de las ecuaciones [9] y [10] demuestra que el circuito en paralelo sobre el condensador, debido a la acción piezo-eléctrica, puede ser considerado como equivalente a un circuito oscilante ficticio formado por una inductancia  $L_1$ , una capacidad  $C_1$  y una resistencia  $R_1$  de valores:

$$L_1 = \frac{\alpha}{k^2} \rightarrow R_1 = \frac{\beta}{k^2} \rightarrow C_1 = \frac{k^2}{\gamma} \quad [11]$$

Supongamos que la diferencia de potencial aplicada a las armaduras sea de la forma  $V = V_0 \sin \omega t$ . La solución de la ecuación [8] se compone, como es sabido, de un término exponencial que decrece rápidamente a un valor despreciable y de un término periódico de amplitud:



$$X_o = \frac{k^2 V_o}{\sqrt{\delta^2 + \left(\alpha \omega - \frac{\gamma}{\omega}\right)^2}} \quad [12]$$

Esta amplitud alcanza su valor máximo si  $\gamma - \alpha \omega^2 = 0$ , o bien:

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad [13]$$

valor igual, precisamente, al de la pulsación del movimiento periódico propio del sistema mecánico que se considera. Vemos así, de otro modo, que las deformaciones mecánicas del cuarzo alcanzan su valor máximo cuando su frecuencia propia es igual a la de la diferencia de potencial aplicada.

La ecuación [9] demuestra, del mismo modo, que la corriente piezo-eléctrica alcanza su valor máximo cuando las vibraciones mecánicas están en resonancia con la diferencia de potencial excitadora. Al separarse de la resonancia esta corriente puede despreciarse y el cuarzo ser considerado simplemente como un dieléctrico cualquiera.

Es, por tanto, solamente cerca de la resonancia cuando hay que considerar el circuito eléctrico ficticio equivalente a la acción del cuarzo.

Determinemos ahora cuál es el papel que desempeña este circuito ficticio. Calculemos con este objeto la impedancia del conjunto cuarzo-circuito ficticio en derivación. Como el amortiguamiento  $\delta$  del cuarzo es pequeño, despreciaremos la resistencia  $R_1$  y consideraremos sólo la capacidad propia del cuarzo  $C$ , la inductancia  $L_1$  y la capacidad  $C_1$  (fig. 8).

Impedancia del circuito ficticio:

$$\rho = j \left( L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)$$

Impedancia del condensador de cuarzo:

$$\rho' = -j \frac{1}{C \omega}$$

Sabemos que llamando  $\rho_t$  a la impedancia del conjunto:

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \quad [14]$$

Pongamos la impedancia  $\rho_t$  bajo la forma:

$$\rho_t = -j \frac{1}{\Gamma \omega} \quad [15]$$

de donde:

$$\frac{1}{\rho_t} = j \Gamma \omega$$

Sustituyendo estos valores en [14]:

$$j \Gamma \omega = \frac{1}{j \left( L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)} + j C \omega \quad [16]$$

Poniendo  $1 - L_1 C_1 \omega^2 = y$ , se puede escribir:

$$L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} = \frac{1}{C_1 \omega} (L_1 C_1 \omega^2 - 1) = -\frac{y}{C_1 \omega} \rightarrow \frac{1}{j \left( L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega} \right)} = j \frac{C_1 \omega}{y}$$

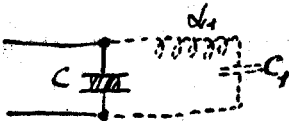


Fig. 8

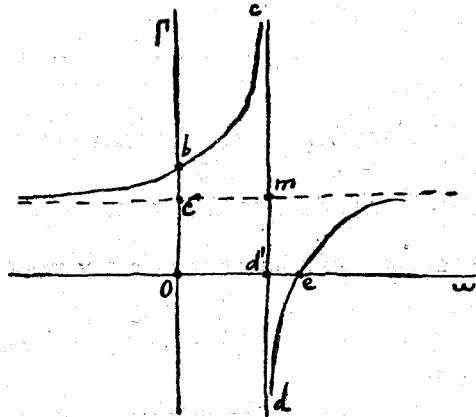


Fig. 9

Sustituyendo en [15]:

$$\rho_t = \frac{1}{j \Gamma \omega} = -j \frac{y}{C \omega \left( \frac{C_1}{C} + y \right)}$$

o sea:

$$\frac{1}{\Gamma} = \frac{y}{C \left( \frac{C_1}{C} + y \right)} \quad [17]$$

de donde se deduce:

$$\Gamma = \frac{C \left( \frac{C_1}{C} + y \right)}{y} = C \left( \frac{C_1}{C y} + 1 \right) \quad [18]$$

Discutamos esta fórmula, haciendo pasar progresivamente a la pulsación  $\omega$  de  $-\infty$  a  $+\infty$  (fig. 9).

- a)  $\omega = -\infty$  „  $\Gamma = C$ .
- b)  $\omega = 0$  „  $\Gamma = C_1 + C$ . Punto *b*.
- c)  $\omega$  sigue creciendo hasta el valor que hace  $1 - L_1 C_1 \omega^2 = 0$ .  $y = 0$  „  $\Gamma = \infty$ . Punto *c*.
- d) Al seguir  $\omega$  creciendo,  $y$  es ya negativo, lo que demuestra que  $\Gamma$  pasa bruscamente de  $+\infty$  a  $-\infty$  (puntos *c* al *d*).
- e) Para  $y = -\frac{C_1}{C}$  „  $\Gamma = 0$  „ Punto *e*.
- f) Al seguir aumentando  $\omega$ ,  $y$  negativo crece en valor absoluto, el término  $\frac{C_1/C}{y}$  es negativo y menor que la unidad, porque  $y > \frac{C_1}{C}$  en valor absoluto,  $\Gamma$  es ya positivo y aumenta en valor absoluto.
- g)  $\omega = \infty$  „  $\Gamma = C$

Se deduce de esta discusión que  $\Gamma$  es positivo, excepto entre los valores de  $\omega$ , que hacen  $y = 0$  e  $y = -\frac{C_1}{C}$  y que lejos de la resonancia, es decir, con alguna separación a uno y otro lado del punto *m*,  $\Gamma = C$  y el cuarzo se comporta simplemente como un dieléctrico ordinario.

En la práctica, los valores de  $\Gamma$  no pasan bruscamente en la resonancia de  $+\infty$  a  $-\infty$ ; se ha obtenido este resultado por haberse despreciado el amortiguamiento, pero, en realidad, la curva afecta la forma representada en la figura 10. Es decir, que la capacidad aparente pasa bruscamente de un valor positivo grande a uno negativo grande en valor absoluto.

Debe hacerse observar que el intervalo *de* es sumamente pequeño en la escala de frecuencias; y que para  $y = -\frac{C_1}{C}$ , la impe-

dancia del sistema eléctrico equivalente al cuarzo es infinita, lo que equivale a decir que si se aplica una f. e. m. en sus armaduras la corriente será mínima para dicho valor de  $\gamma$ ; pero este modo de operar sería poco práctico, toda vez que las capacidades de los cuarzos utilizados como patrones de frecuencia son sumamente pequeñas, del orden de la millonésima de microfaradio ( $1 \mu \mu F$ ), y la corriente alterna que podría circular por tan débiles capacidades sería difícil de medir, aun a las frecuencias elevadas.

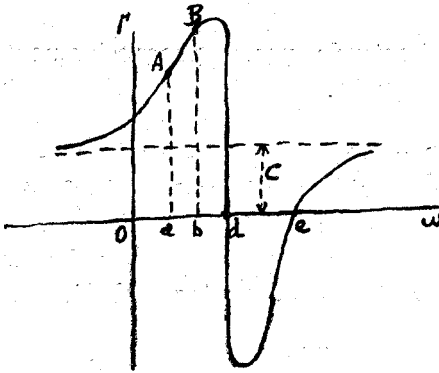


Fig. 10

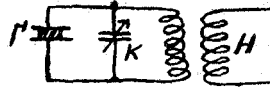


Fig. 11

Lo que se hace, en general, en la aplicación del cuarzo como patrón de frecuencia es colocar la placa de cuarzo (fig. 11) en derivación sobre las bornas del condensador de un circuito oscilante, débilmente acoplado a un heterodino  $H$ , con objeto de que la f. e. m. inducida por éste en aquél pueda ser considerada como constante.

Llamemos  $L$  a la inductancia,  $R$  a la resistencia y  $K$  a la capacidad del circuito oscilante;  $E$  a la f. e. m. inducida por el heterodino en las bornas de la inductancia,  $\Gamma$  a la capacidad del condensador que forma el cuarzo e  $I$  a la corriente eficaz en el circuito oscilante.

La capacidad total del circuito oscilante es  $K + \Gamma$ . Sabemos que:

$$I^2 = \frac{E^2}{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{(K + \Gamma)\omega} \right)^2}$$

valor evidentemente mínimo si  $K + \Gamma = 0$ .

Pero se ha visto antes (fórmula [18]) que:

$$\Gamma = \frac{C_1}{y} + C$$

valor que, sustituido en la condición antes expresada, da:

$$K + \frac{C_1}{y} + C = 0$$

de donde se deduce:

$$y = -\frac{C_1}{K + C} \quad [19]$$

Pero en la práctica,  $K$  es muy grande con relación a  $C_1$ ; la fracción  $\frac{C_1}{K + C}$  tiene un valor despreciable, y se puede admitir, sin error sensible, que la condición [19] se reduce a la:

$$y = 0$$

es decir, que la corriente  $I$  es mínima cuando  $L_1 C_1 \omega^2 = 1$ , o sea, cuando la pulsación de las oscilaciones inducidas por el heterodino es igual a la propia del cuarzo.

En lo que precede se ha prescindido de la resistencia eléctrica del circuito equivalente al cuarzo en vibración, pero no se comete con ello un gran error porque esta resistencia es sumamente débil.

En resumen: el mínimo de la intensidad de la corriente se obtiene sin error sensible, pero *no exactamente*, cuando la frecuencia de las oscilaciones inducidas en el circuito oscilante es igual a la propia del cuarzo.

### III. Aplicaciones.

5. *Generalidades.*—Los cristales de cuarzo se encuentran principalmente en el Brasil y en Madagascar. El cuarzo brasileño es de superior calidad para las aplicaciones ópticas, pero no es posible pronunciarse en favor de los cristales de una de las dos procedencias citadas en cuanto a sus propiedades piezo-eléctricas se refiere.

Desde este último punto de vista, el aspecto de los cristales es la principal guía en la elección de los ejemplares de buena calidad.

Si las facetas indican que el cristal es de un solo eje, si el cuerpo del mismo está desprovisto de grietas, nubes, manchas de color, etcétera, y si las aristas de la parte prismática son paralelas, rectas y sin roturas, el ejemplar será aprovechable para las aplicaciones eléctricas.

Una vez tallado el cristal, según las dos secciones rectas  $MN$  y  $PQ$  (fig. 2), que deben ser exactamente paralelas y perpendiculares al eje óptico y quedar bien bruñidas, debe obtenerse una buena transparencia a través de ellas.

Si las condiciones anteriores quedan satisfechas, se intercala la placa preparada, como acaba de indicarse, entre dos prismas de Nicol, cruzados a la extinción, provistos de un manantial de luz apropiado y del dispositivo óptico necesario a la observación. Revela ésta que ciertas partes del cristal ofrecen un color uniforme bajo la influencia de la luz polarizada, pero otras, en general las situadas cerca de los bordes, presentan el aspecto de brillantes triángulos de colores variados; el color uniforme indica un cristal formado según un eje único, mientras que las partes coloreadas denotan la formación de otros cristales en la masa del cristal principal. Sólo las partes que dan luz y color uniforme son útiles, no siendo práctico el intentar la fabricación de placas piezoeléctricas con los trozos jaspeados, que, en general, no darán resultados satisfactorios.

Las placas pueden tallarse en forma de paralelepípedo (fig. 4) o de disco. En ambos casos, su espesor, o sean sus dimensiones en dirección perpendicular a las caras activas, constituyen el dato principal, según se explicó en el apartado 3, para la determinación de su frecuencia propia de vibración. Sin embargo, las demás dimensiones del paralelepípedo o disco contribuyen, en cierta cuantía, a modificar la frecuencia de la placa, y aún pueden variarla fundamentalmente, como se verá más adelante. Así, pues, la expresión "metros por milímetro", que se empleó en los primeros tiempos de la práctica piezo-eléctrica, indicadora de que determinado espesor de una placa de cuarzo, en milímetros, multiplicada por cierto factor da la longitud de onda en metros, sólo puede aplicarse a las placas delgadas. Los mencionados factores varían de 102 a 118 en las placas talladas en *onda larga*, y de 120 a 175 en las que lo están en *onda corta*. Los valores medios que siguen constituyen una guía útil para las aplicaciones:

$$\text{Placas o discos tallados en } \textit{onda corta}. \lambda = 145 \cdot e, f = \frac{2070}{e} \text{ Kc/s}$$

Placas o discos tallados en *onda larga*.  $\lambda = 110 \cdot e$ ,  $f = \frac{2750}{e}$  Kc/s

Las propiedades piezo-eléctricas de las placas de cuarzo talladas en la forma que acaba de explicarse se utilizan en radioelectricidad:

a) Como generadores de oscilaciones de alta frecuencia, rigurosamente constante, asociadas a sistemas de lámparas termo-iónicas. Constituye ésta la aplicación fundamental del cuarzo a la emisión radioeléctrica en ondas cortas; el gran número de comunicaciones de esta clase que unen los distintos puntos de la Tierra exigen la asignación a cada una de ellas de longitudes de onda muy

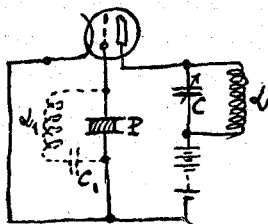


Fig. 12

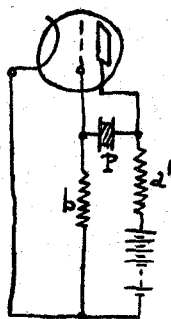


Fig. 13

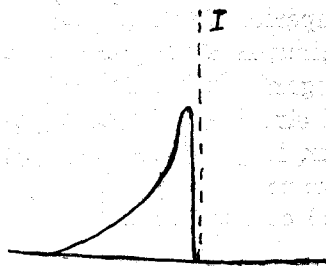


Fig. 14

poco diferentes entre sí, que deben permanecer constantes para evitar perturbaciones.

b) Para estabilizar las oscilaciones producidas por cualquier sistema generador en alta frecuencia.

c) Como diapasones de alta frecuencia, con tal de que se hayan determinado exactamente, de una vez para siempre, sus frecuencias propias a distintas temperaturas.

6. *Generadores de oscilaciones.* — Consideremos (fig. 12) una lámpara de tres electrodos, en cuyo circuito de rejilla se intercala una placa *P* de cuarzo. Hemos visto anteriormente que el efecto que se obtiene es el mismo que si se montase, en derivación sobre el condensador de cuarzo, un circuito oscilante  $L_1 C_1$ .

*Miller* ha demostrado que la resistencia aparente del espacio filamento-rejilla es negativa. Resulta, por tanto, que el circuito  $L_1 C_1$  está en derivación sobre una resistencia negativa, y que las oscilaciones que en él se produzcan podrán mantenerse indefinidamente si la influencia de la resistencia negativa es mayor que el amortiguamiento del circuito.

Una vez producidas las oscilaciones en el circuito de rejilla se actúa sobre el condensador  $C$  hasta llevar el circuito  $LC$  a la resonancia que corresponde al límite de entretenimiento, aproximándose así a la frecuencia propia del cuarzo.

Este montaje fué indicado por *Pierce*, quien empleó también el representado en la figura 13, en el que la placa de cuarzo está intercalada entre la rejilla y el ánodo de la lámpara. La resistencia  $b$  del circuito de rejilla tiene por objeto estabilizar la amplitud de las oscilaciones, que varía de un modo cíclico si dicha resistencia no se emplea. En  $a'$  se intercala una resistencia, una inductancia o, mejor, un circuito resonante, como en la figura 12. En este caso, si partiendo de un valor de la capacidad del condensador variable  $C$ , superior al que corresponde a la resonancia del cuarzo, se la va disminuyendo progresivamente aproximándonos a esta resonancia, se llegará a alcanzar una posición en que las oscilaciones se inician en el circuito oscilante, van aumentando después en amplitud y decrecen luego hasta apagarse, cuando se alcanza un punto que corresponde, en aquel circuito, a una frecuencia ligeramente inferior a la del cuarzo (fig. 14).

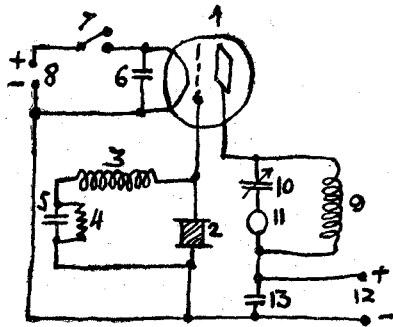


Fig. 15

- |  |  |
|--|--|
| 1. Lámpara de tres electrodos.                                   | 8. Bornas de la batería de calefacción.          |
| 2. Placa de cuarzo (se han empleado dos de 6.000 y 7.500 Kc/s.). | 9. Bobina del circuito oscilante.                |
| 3. Bobina de choque.   | 10. Condensador variable del circuito oscilante. |
| 4. Resistencia de rejilla.                                       | 11. Amerímetro térmico.                          |
| 5, 6 y 13. Condensadores fijos.                                  | 12. Bornas de la batería de tensión anódica.     |
| 7. Interruptor.  |  |

Si el montaje es el de la figura 12, se parte, en el circuito  $LC$ , de una frecuencia ligeramente superior a la propia del cuarzo, que se va disminuyendo a medida que la capacidad  $C$  se aumenta; las os-



cilaciones se apagan un poco antes de alcanzar el punto de resonancia.

En la figura 15 se representa el esquema de principio del oscilador, estabilizado por cuarzo, que hemos proyectado y empleado en nuestros trabajos del *Instituto Nacional de Física y Química*.

Todos estos elementos van encerrados en una caja de palastro de aluminio de tres milímetros de espesor.

7. *Estabilización de la frecuencia de un oscilador.*—Consideremos el oscilador representado en la figura 16 en derivación sobre cuyo condensador se ha montado una placa de cuarzo  $P$  de frecuencia sensiblemente igual a la de las oscilaciones que se desean estabilizar.

Se ha visto en el estudio analítico (apartado 4) que, en las proximidades de la resonancia, la capacidad equivalente del cuarzo aumenta considerablemente al aumentar la frecuencia. Así, pues, si en nuestro oscilador la frecuencia pasa del valor  $a$  que quiere mantenerse a uno mayor, la capacidad del cuarzo aumenta de  $A$  a  $B$

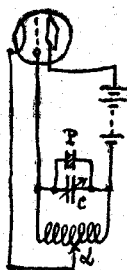


Fig. 16

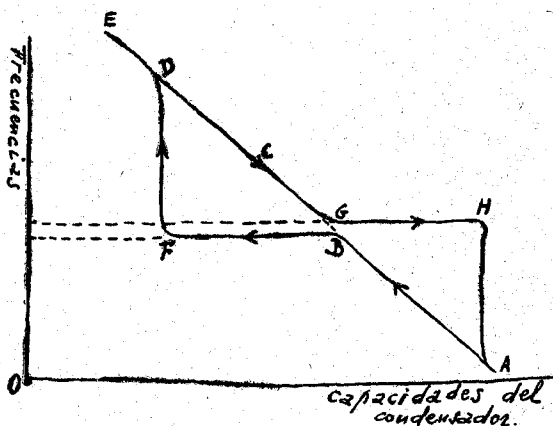


Fig. 17

(figura 10), crece consiguientemente la del sistema de condensadores en paralelo  $PC$  y la frecuencia del oscilador vuelve a disminuir.

Estudiemos un poco más a fondo el papel estabilizador del cuarzo, y para ello partiremos en el condensador  $C$  de un valor grande de su capacidad, que iremos disminuyendo progresivamente. Si no existiese la placa de cuarzo  $P$  en derivación, la frecuencia del autooscilador aumentaría progresivamente, siguiendo la curva  $ABCDE$  (figura 17). Mas con el cuarzo  $P$ , al aproximarnos a la resonancia

llega un momento (punto *B*) en que a valores decrecientes de la capacidad del condensador corresponden valores crecientes de la capacidad de *P*; la curva sigue entonces por *BF* (región estabilizadora) hasta que pasado el valor de la frecuencia del cuarzo éste se hace inactivo y la curva vuelve bruscamente a seguir su camino primitivo *DE*. Se ha visto anteriormente que la frecuencia de la rama *BF* es un poco inferior a la que corresponde a la frecuencia propia del cuarzo. Si, por el contrario, partimos de un valor pequeño de la capacidad del condensador y la aumentamos progresivamente, la región estabilizadora del cuarzo corresponde a una frecuencia ligeramente superior a la de resonancia (rama *GH*).

Hay, por tanto, dos frecuencias que pueden ser estabilizadas por la placa de cuarzo, ninguna de las cuales es igual a la suya propia. Esta dificultad podría vencerse dando un valor fijo a la frecuencia del auto-oscilador, pero el sistema no es recomendable cuando se desea obtener gran precisión y estabilidad.

El empleo de osciladores estabilizados por cuarzo sólo es recomendable para los emisores radio-eléctricos portátiles en que desee obtenerse el máximo de potencia con el mínimo de peso y siempre que sea admisible un margen de variación de la frecuencia del 0,1 por 100. En los demás casos es preferible el empleo de generadores de cuarzo cuya potencia se aumenta hasta el valor deseado por medio de amplificadores.

8. *Diapasones de alta frecuencia*.—Se ha demostrado (apartado 4) que si se aplica una f. e. m. alterna a una placa de cuarzo, ésta se comporta como una impedancia sumamente pequeña, si la frecuencia de aquella f. e. m. es igual a la propia del cuarzo.

Se utiliza esta propiedad para constituir un patrón de alta frecuencia, o diapasón, formado por un auto-oscilador y un circuito de detección, débilmente acoplado con aquél. Dentro de una estrecha gama de frecuencias, la potencia liberada por el oscilador es perfectamente constante y lo será también, por tanto, la f. e. m. inducida en el circuito de detección; la desviación del galvanómetro del circuito de ánodo del oscilador permanecerá, consiguientemente, prácticamente invariable cuando se produzca la resonancia de las oscilaciones de éste con la frecuencia propia del circuito de detección. Mas si se intercala en este circuito una placa de cuarzo, la desviación del galvanómetro permanecerá, del mismo modo, constante en tanto que la frecuencia del generador no sea exactamente igual a la del cuarzo, pero en el momento en que se produzca la resonancia se notará un agudo decrecimiento de la corriente anódi-

ca (fig. 18) debido al aumento de corriente en el circuito de detección por causa de la brusca disminución de su impedancia. Si el acople entre los dos circuitos no es muy débil, la amplitud de las oscilaciones mecánicas del cuarzo pueden llegar a romperle en pequeños fragmentos, fenómeno que viene acompañado de un estampido.

La *Compañía Marconi* ha construido un indicador de onda cuyo esquema de principio se representa en la figura 19. Las oscilaciones que se desean comprobar excitan la bobina *H* del circuito de rejilla, polarizado por la batería *B*; no existe, por tanto, gracias a la acción de esta batería, corriente en el circuito de ánodo, excepto en el caso de que aquellas oscilaciones sean de frecuencia igual a la propia de la placa de cuarzo *P*, pues entonces la impedancia de ésta baja bruscamente y la f. e. m. inducida en la bobina *H* origina una corriente que señala el amperímetro *A*.

Citaremos, por último, el *resonador luminoso* de *Giebe* y *Scheibe*,

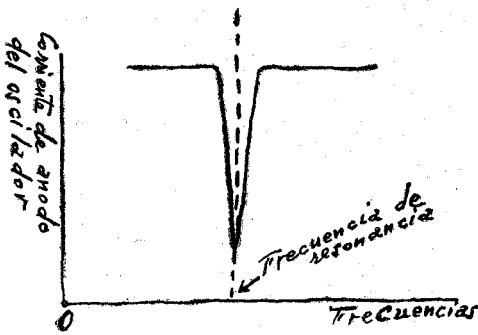


Fig. 18

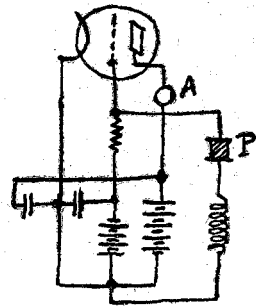


Fig. 19

cuyo órgano principal es una placa de cuarzo montada en el interior de una ampolla de vidrio con gas neon enrarecido. El resonador está asociado a una bobina, excitada por las oscilaciones que han de comprobarse, montada en un circuito aperiódico. Si la frecuencia de las oscilaciones inducidas en la bobina es igual a la propia de la placa de cuarzo, ésta brilla de un modo totalmente diferente de la luminosidad peculiar de un tubo de neon, luminosidad que, como es sabido, se produce a cualquier frecuencia, siempre que la f. e. m. inducida en la bobina sea de amplitud suficiente. La f. e. m. necesaria para que el cuarzo brille es muy inferior; un acople suficientemente débil hará más patente, por tanto, la diferencia entre dichos fenómenos luminosos.

#### IV. Defectos.—Variaciones de la frecuencia por causa de las influencias exteriores.

9. *Defectos de los cristales de cuarzo.*—Una placa de cuarzo, de material bien escogido y cuidadosamente tallada, proporciona, como se ha dicho, una frecuencia determinada; pero supongamos que, para la aplicación a que se la destina, esta frecuencia es un poco más pequeña que la deseada; es preciso entonces disminuir su espesor. Mas al trabajarla con este objeto sucede muchas veces que la placa se vuelve inactiva o que se produce un salto repentino de su frecuencia propia, que pasa bruscamente a ser muy superior a la necesaria.

La figura 20 representa un diagrama de las frecuencias de una

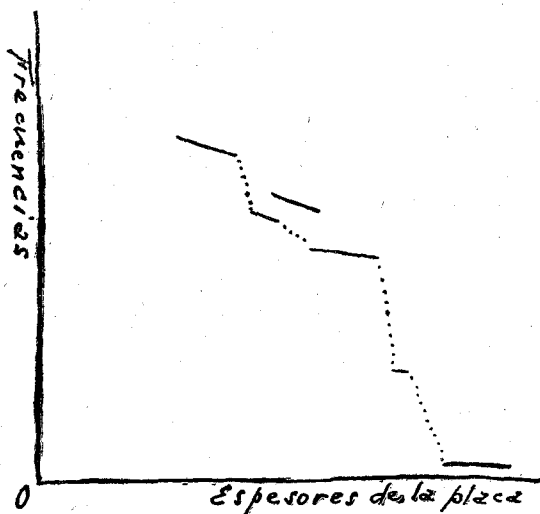


Fig. 20

placa de espesor progresivamente decreciente. Los trazos llenos representan frecuencias medidas en función de los espesores; las partes de puntos indican los “saltos” de frecuencia.

Otra anomalía que suele producirse, representada en A en el diagrama, es la generación de dos frecuencias correspondientes a un mismo espesor.

Los “saltos” de frecuencia en una placa de cuarzo pueden también ser producidos por variaciones de la temperatura; sucede mu-

chas veces que una placa sólo se comporta normalmente dentro de una escala de temperaturas determinada; fuera de ella la frecuencia cambia bruscamente. Un choque mecánico o eléctrico puede, asimismo, producir "saltos" de frecuencia.

Los "saltos" de frecuencia se producen muy rara vez en las placas gruesas, de frecuencias inferiores a 2.500 Kc/s.; el fenómeno se presenta más frecuentemente en las placas talladas en *onda corta* y también en los ejemplares sacados de las partes de los cristales más próximos a sus caras naturales.

La industria proporciona placas de cuarzo de frecuencias comprendidas entre 10.000 y 37,5 Kc/s. (30 a 8.000 metros de longitud de onda), pero para obtener ejemplares que satisfagan a las condiciones exigibles de frecuencia y potencia es preciso, en general, tallar muchos cristales para obtener una placa de las más altas frecuencias de esta escala.

Las consideraciones que preceden ponen de relieve la conveniencia, para obtener oscilaciones de frecuencia determinada, de partir inicialmente de una muy inferior, proporcionada por un oscilador de cuarzo cuya placa sea suficientemente gruesa y multiplicar después sucesivamente la frecuencia por medio de una cadena de circuitos de válvulas destinados a este fin, hasta obtener la que se desea. Los cristales gruesos son, en efecto, más fáciles de tallar; se presenta rara vez con ellos el fenómeno del "salto" de frecuencia; puede obtenerse, como se verá luego, una placa de mejor coeficiente de temperatura y un mismo oscilador es capaz de proporcionar un número variado de múltiplos de la frecuencia de la placa. La instalación es, en cambio, más costosa y menos sencilla por requerir cierto número de circuitos de multiplicación.

Otro punto que debe ser examinado es el referente a la amplitud de las oscilaciones eléctricas de las placas. Un ejemplar sometido a un trabajo duro puede presentar, aun sin romperse, síntomas de fatiga, que se manifiestan por faltas de estabilidad; pero tampoco desde este punto de vista se comportan todas las placas del mismo modo. Sucede, en efecto, que ejemplares de las mismas dimensiones, sacados de un mismo cristal y colocados en el mismo montaje no proporcionan, ni mucho menos, iguales voltajes. No es raro encontrar, en estas condiciones, dos placas cuya relación de voltajes sea de 1 a 2.

Es necesario, por tanto, en los cálculos, partir de un valor pequeño del voltaje haciendo trabajar el cuarzo moderadamente, aun-

que el número de válvulas de la instalación tenga que ser superior al de las que serían necesarias empleando buenos ejemplares.

10. *Influencia de la temperatura.*—Las variaciones de temperatura modifican la frecuencia de las oscilaciones propias de una placa de cuarzo.

Según *Cady*, un aumento de la temperatura de un grado disminuye en  $20 \times 10^{-6}$  la frecuencia de una placa en el sentido longitudinal; en las oscilaciones transversales la disminución es de  $5 \times 10^{-6}$  (*Powers*).

Parece más lógico pensar, de acuerdo con *Dye*, que la disminución de la frecuencia con la elevación de temperatura no sea constante en todos los cuarzos y dependa, además, de las dimensiones de las placas; así, según dicho investigador, el coeficiente de variación es despreciable en las vibraciones longitudinales de las placas delgadas y largas y de importancia apreciable en las gruesas y cortas. Para las vibraciones transversales varía entre  $-30$  y  $-80$  milésimas.

La cuestión ha sido estudiada a fondo por numerosos investigadores. *Morrison*, *Heising* y *Lack*, en América, han dedicado a ella especial atención, tendiendo a obtener placas de cuarzo cuyo coeficiente de temperatura sea nulo o muy pequeño. Ello se ha conseguido únicamente con cristales tallados en *onda corta*, dando a las dimensiones según los tres ejes valores que guarden entre sí una relación determinada; en una misma placa se ha conseguido pasar de un coeficiente de temperatura negativo a uno positivo por un simple reajuste de sus dimensiones.

Con arreglo a estas ideas, el estudio de una placa de cuarzo de frecuencia y coeficiente de temperatura determinados exige cálculos relativos a las dimensiones de los tres ejes, perdiendo su valor el concepto de frecuencia en función solamente del espesor de la placa, explicado anteriormente (apartado 5). Las placas así talladas para obtener un coeficiente de temperatura muy pequeño son más gruesas que las de uso general.

La gama de frecuencias dentro de la cual pueden obtenerse placas de coeficiente de temperatura igual a cero es más bien reducida, resultando de dimensiones sumamente pequeñas las de frecuencias inferiores a 375 Kc/s. debido a la relación que, como se ha dicho, tienen que guardar las contadas según sus tres ejes.

11. *Influencia de la presión atmosférica.*—Las variaciones de la presión atmosférica hacen variar también la frecuencia propia

de vibración de las placas de cuarzo, pero en un grado tan pequeño que no vale la pena tenerlas en cuenta, al menos desde el punto de vista de su importancia en las transmisiones radio-eléctricas. Sin embargo, si el número de radio-comunicaciones sigue aumentando en la misma proporción que estos últimos años y se hace preciso asignar a cada una bandas de frecuencias cada vez más estrechas, la influencia de los cambios barométricos podría llegar a ser otro motivo de preocupación.

12. *Influencia de las variaciones de tensión de las baterías.*—Las variaciones de tensión de las baterías de placa o filamento ejercen, asimismo, una influencia despreciable sobre la frecuencia propia de una placa de cuarzo. Así, una variación del voltaje de cualquiera de estas baterías, o de ambas a la vez, de un 10 por 100, que ya es considerable, no acusa una variación mayor de tres en una frecuencia del orden de 10 Kc/s.

Haremos presente, para terminar, que el empleo de las válvulas de tres electrodos ha sido general, hasta la fecha, para las aplicaciones piezo-eléctricas del cuarzo. Pero se vislumbra ya cierta tendencia a usar, para este objeto, las válvulas de cuatro electrodos, al menos en ciertos tipos de aparatos, porque las oscilaciones se producen en ellas más fácilmente y pueden obtenerse potencias más grandes.

---

#### BIBLIOGRAFIA

- Meissner.—Elektrische Nachrichten Technik. Noviembre 1920.  
Cady.—Proceedings Institute of Radio engineers. Tomo 10. 1922.  
Pierce.—Piezo electric crystal. Proc. American Academy of Arts and Sciences. Tomo 59. Octubre 1923.  
Cady.—Journal of the optical Society of America. Abril 1925.  
Mallet & Terry.—The quartz oscillator. Wireless world. Tomo 16. Junio 1925.  
Dye.—Proc. of the Physical Society of London. Agosto 1926.  
Giebe & Scheibe.—Zeitschrift für Physik. Tomo 33, pág. 335. 1926.  
Scheibe.—Zeitschrift für Hochfrequenztechnik. Tomo 28, pág. 15. 1926.  
Meissner.—Elektrischen Nachrichten technik. Tomo 3, pág. 401. 1926.  
Miller.—Scientific papers. Bureau of Standards núm. 351.  
Heising.—Improvements in or relating to Piezo-electric Crystals. Patente inglesa. 30 junio 1926.  
Crossley.—Proc. Inst. Radio Eng. Tomo 15, núm. 1, de 1927.  
Kronkë.—Wireless world. 23 de diciembre 1925.  
Jouaust.—Le quartz piézo-électrique comme étalon de fréquence. 1929.  
Morison.—Proc. Inst. Radio eng. Tomo 17, núm. 7, 1929.  
Lack.—Proc. Inst. Radio eng. Tomo 17, núm. 7, de 1929.  
T. D. Parkin.—The Marconi Review. Núm. 37 de 1932.





**RICARDO ESCUDERO CISNEROS**

**Comandante de Ingenieros e Ingeniero Radio-  
electricista de la Escuela Superior de París**

---

# **Propagación y penetración de las ondas electromagnéticas**



---

**GRÁFICAS RUIZ FERRY.-ABASCAL, 56**  
: : : : MADRID, 1955 : : : :

---



---

## CAPITULO PRIMERO

### Datos sobre la naturaleza de la electricidad.

1. *Primeras experiencias.*—Fué hacia el principio del siglo XVII cuando la atención de los físicos se fijó en los fenómenos de electrificación por frotamiento. Desde la antigüedad se conoce la propiedad que tiene el ámbar amarillo de atraer los cuerpos ligeros cuando ha sido frotado previamente. Pero esta observación había quedado aislada y no había sido objeto de ningún estudio metódico. Las investigaciones de Gilbert (1600), Gray (1727) y de otros físicos demostraron que el fenómeno era mucho más general. El vidrio, el azufre y las resinas poseían la misma propiedad, que recibió el nombre de *electrificación*. Utilizando un péndulo, formado por una pequeña bola de medula de saúco suspendida de un hilo de seda, los experimentadores pudieron poner en evidencia las fuerzas ejercidas por los cuerpos electrizados y demostrar que éstas eran tanto atractivas como repulsivas. Descubrieron, igualmente, que los metales podían estar electrizados siempre que estuviesen sujetos a un soporte de vidrio o de otra sustancia electrizable por frotamiento directo. En este caso, la propiedad de electrificación se extendía a toda la superficie del metal, en tanto que para los cuerpos de la segunda categoría no aparecía más que en los puntos frotados. Por consiguiente, era posible dividir los cuerpos en dos clases: los *conductores*, capaces de transmitir la propiedad de *electrificación* y los *aisladores*, oponiéndose a la difusión de la electrificación. En 1733 el físico Dufay llegó, por el estudio de las fuerzas eléctricas, a poner en evidencia la existencia de dos electrificaciones diferentes.

2. *Teoría de los flúidos eléctricos.*—Para darse cuenta de los fenómenos observados, Simmer imaginó su famosa teoría llamada de los *dos flúidos* (1759). En toda materia coexisten dos flúidos llama-

dos *electricidad vítrea o positiva y electricidad resinosa o negativa*, cuyos elementos se rechazan si son del mismo nombre y se atraen si son de nombres contrarios. En los cuerpos no electrizados o neutros las dos electricidades coexisten en cantidades iguales. Los dos flúidos pueden desplazarse en el interior y en la superficie de los cuerpos conductores; en los aisladores, por el contrario, no pueden moverse. Se deduce de aquí que, en los conductores en estado neutro, los flúidos se extienden de modo que realicen una distribución estable ( es decir, de energía potencial mínima ); esto se consigue cuando las electricidades constituyen en la superficie del conductor una capa doble en la cual los constituyentes, de nombres diferentes, tienen en todos los puntos una densidad igual. La acción eléctrica resultante es entonces evidentemente nula. Si una causa exterior cualquiera (frotamiento, acción de un cuerpo electrizado) viene a modificar la re-

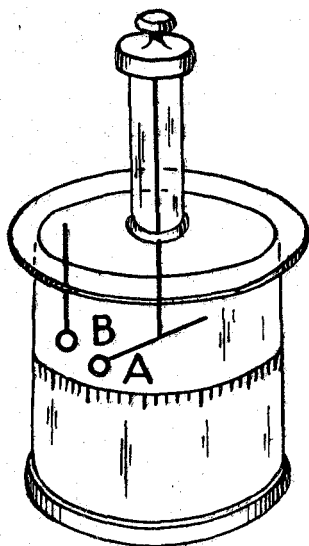


Fig. 1

lación entre las cantidades de electricidad positiva y negativa o el reparto de éstas en la superficie del cuerpo, la resultante de las fuerzas atractivas y repulsivas ya no es nula y puede ser puesta en evidencia por medio de dispositivos suficientemente sensibles. Los flúidos de nombres contrarios aparecen siempre en cantidades iguales; se admite, además, que en todos los fenómenos eléctricos las cantidades de electricidad permanecen constantes y que todo se reduce

a sencillos desplazamientos de las cargas (principio de la conservación de la electricidad).

3. *Ley de Coulomb.*—La realización del primer dispositivo que permite la medida de las fuerzas eléctricas es debida al físico francés Coulomb (1785). Una ligera aguja de goma laca (aislante), *A* (figura 1), terminada por una pequeña bola de medula de saúco, *B* (conductora) está suspendida, en el centro de una caja cilíndrica de cristal, por medio de un hilo largo y fino de plata. Una segunda bola de medula de saúco puede ser colocada en el interior de la caja después de haber sido electrizada. Si se lleva esta bola hasta que esté en contacto con la primera, la electricidad se reparte entre las dos pequeñas esferas, que desde ese momento se rechazan. Oponiendo a la fuerza repulsiva el conocido par de torsión del hilo es posible, midiendo éste, conocer la fuerza repulsiva y estudiar su variación en función de la distancia.

A pesar de la débil precisión de los dispositivos y de la existencia de varias causas de error, Coulomb llegó a demostrar que las fuerzas eléctricas que se ejercían entre dos cuerpos cargados estaban regidas por una ley de la misma forma que la de la atracción universal:

$$f = \frac{K m m'}{r^2}$$

en la que *m* y *m'* representan la magnitud de las cargas tomadas con sus signos y *r* su distancia. Coulomb admitía, como Newton, la posibilidad de la acción instantánea a distancia y el coeficiente *K* lo consideraba como característico de las unidades empleadas y, por consiguiente, reducible a la unidad por una elección conveniente de éstas.

En realidad, las fuerzas medidas eran debidas a la *materia electrizada*, y basándose en la hipótesis de Simmer se pudieron atribuir esas fuerzas al *fluido eléctrico*. Admitido esto, la ley de Coulomb aparecía como la primera relación cuantitativa que traducía las propiedades *macroscópicas* de la electricidad (es decir, las propiedades de la carga eléctrica tomada en cantidad muy superior a las más pequeñas partes que se pueden aislar). A pesar de que la determinación de una relación tan importante se ha hecho de un modo que inspira poca confianza, se puede, sin embargo, considerar ésta como *prácticamente cierta*, pues ha sido verificada experimentalmente dicha ley.

4. *Ecuación de Laplace y de Poisson.*—El descubrimiento de Coulomb fué el punto de partida de importantes progresos. Establecida la semejanza de las leyes de la fuerza eléctrica y de la gravitación, dicha semejanza permitió utilizar para el estudio del campo eléctrico los trabajos de Laplace sobre los campos newtonianos. La electrostática estaba creada. En 1812, Poisson dió la expresión más general del potencial electrostático  $V$  en un medio en donde la carga está distribuída de un modo continuo con una densidad  $\rho$  (tomada positiva o negativamente, según el signo de la carga). Este potencial satisface, según se demuestra en cálculo vectorial, a la ecuación

$$\Delta_2 V = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = -4 \pi \rho$$

relación que se reduce, en el caso en que no hay electricidad libre en el espacio estudiado, a la ecuación

$$\Delta_2 V = 0$$

que es la ecuación de Laplace.

5. *Influencia del medio.*—Hacia 1830, los trabajos de Faraday sobre las propiedades de los cuerpos aisladores o dieléctricos abrieron a los físicos nuevos horizontes. Algunos años antes, Cavendish había demostrado que en un condensador de armadura fija el hecho de sustituir por un dieléctrico el espacio que había antes entre las placas tenía por efecto multiplicar la capacidad por un coeficiente  $K$ , característico del dieléctrico, y que llamó *poder inductor específico*. Faraday emitió la hipótesis de que las fuerzas electrostáticas eran debidas a tensiones producidas en el dieléctrico por la presencia de cargas eléctricas, y que se ejercen según las *líneas de fuerza*. Por consiguiente: el coeficiente  $K$ , de la ley de Coulomb, pasaba a depender, no sólo de la elección de unidades, sino también de la *naturaleza del dieléctrico* que separaba las cargas. Tomando como unidad de cantidad de electricidad la carga de un punto que, en el vacío, ejerce sobre una carga igual, colocada a un centímetro de distancia, una fuerza repulsiva igual a *una dyna*, la ley de Coulomb se escribe:

$$f = \frac{1}{K} \frac{m m'}{r^2}$$

siendo  $K$  el poder inductor específico del dieléctrico. El aumento de la capacidad debido a la presencia del dieléctrico se explica, pues, por la disminución correspondiente de la fuerza, y por consiguiente de la energía potencial relativa al desplazamiento de una misma carga.

La transmisión de la fuerza por el intermedio de un medio exige necesariamente la existencia de una *velocidad de propagación finita* de las acciones electrostáticas (pues en la hipótesis inversa sería preciso admitir que el medio posee una rigidez perfecta); la nueva teoría implicaba rechazar la mecánica de Galileo y de Newton, basada en la hipótesis de la acción instantánea a distancia.

Completándola con la noción fecunda de la corriente de desplazamiento en los dieléctricos, Maxwell pudo deducir de ello la ley de propagación de las perturbaciones electromagnéticas, que fué muy brillantemente comprobada por la experiencia.

6. *La descarga en los gases.*—Las teorías precedentes destinadas a explicar las propiedades macroscópicas de la electricidad no prejuzgan en nada la naturaleza intrínseca de ella. Los conocimientos sobre la estructura de la carga no podrán ser adquiridos por la vía experimental más que cuando sea posible extraer la electricidad de la materia. Los físicos del siglo XVII habían observado ya que un conductor perdía rápidamente su carga cuando estaba terminado por una punta aguda; en la proximidad de ella se desarrollaban ciertos fenómenos: efluvios, penachos luminosos, repulsiones electrostáticas, atribuidas por los experimentadores a la salida al exterior de la electricidad del conductor. El conjunto de estos hechos, denominados *poder de las puntas*, aparecía bastante complejo. Casi al mismo tiempo se observó que la descarga eléctrica atravesaba los gases rarificados más fácilmente que el aire a la presión atmosférica y producía en ellos fenómenos luminosos muy brillantes y de una gran complejidad. Estos eran debidos a la excitación de las moléculas del gas por las cargas eléctricas puestas en movimiento por la diferencia de potencial elevada mantenida entre las dos armaduras del tubo en donde se efectuaba la descarga.

7. *Los rayos catódicos.*—En 1868, Hittorf, aprovechándose del progreso de la técnica del vacío, llegó a reducir la presión reinante en sus tubos de gas a un micrón de mercurio aproximadamente. El resultado fué notable; el aspecto de la descarga se simplificó considerablemente; todas las estrías desaparecieron. En su lugar se pudo observar una débil radiación que partía normalmente de la super-

ficie del cátodo (electrodo unido al polo negativo del manantial de electricidad) y que excitaba una viva fluorescencia verde en el punto en donde chocaba con el cristal de la ampolla. Crookes dió a esta nueva radiación el nombre de rayos catódicos. Poseían propiedades notables que vamos a estudiar en detalle. En particular, podían atravesar delgadas hojas de metal.

8. *Los rayos catódicos están constituidos por electricidad negativa libre.*—Tomemos un tubo de Crookes que presente la disposición de la figura 2. El cátodo está constituido por un disco de metal,  $C'$ , fijo normalmente en el eje del tubo en una de las extremidades. El ánodo,

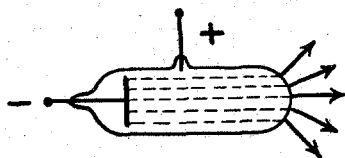


Fig. 2

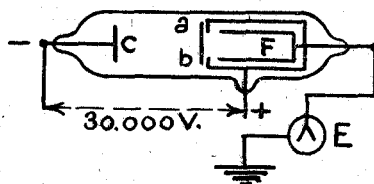


Fig. 2'

do,  $A$ , es un cilindro de metal completamente cerrado. La base colocada enfrente del cátodo está agujereada con una abertura circular,  $a b$ , que cierra herméticamente una delgada hoja de aluminio (espesor  $1/100$  mm., aproximadamente). En el interior de este cilindro, y aislado eléctricamente de él, se halla un cilindro de Faraday,  $F$ , cuya abertura está colocada enfrente de la ventana y cuyo fondo está unido a las hojas de oro de un electroscopio,  $E$ , cuya caja está unida al suelo. Se observa que este último toma una fuerte *carga negativa* cuando el tubo funciona. Como el ánodo forma pantalla electrostática perfecta alrededor del cilindro de Faraday, la carga negativa tomada por el cilindro no puede ser transportada más que por la radiación catódica que *ha atravesado* la ventana  $a b$ . Como el cátodo no sufre, por otra parte, ninguna variación de peso, ni ninguna alteración en su superficie, aunque el funcionamiento dure mucho, se debe admitir que los rayos catódicos están constituidos por electricidad *libre* sin ningún soporte material. La intensidad de los haces catódicos producidos en los aparatos precedentes no pasa de algunos miliamperios. Utilizando otra clase de fenómenos es posible obtener emisiones de electricidad libre mucho más intensas.

9. *Los fenómenos termoiónicos.*—En 1884, Edison puso en evidencia la emisión de cargas negativas libres por los cuerpos calen-



tados a una alta temperatura. Se puede estudiar cómodamente este fenómeno utilizando un dispositivo debido a Fleming y conocido con el nombre de *diodo* o *lámpara de dos electrodos*. En el eje de un cilindro de cristal, en donde reine un vacío muy elevado, está colocado un filamento, *F*, de carbón o de tungsteno (fig. 3) rodeado por todas partes por un cilindro de níquel, *C*. Se observa que si, después

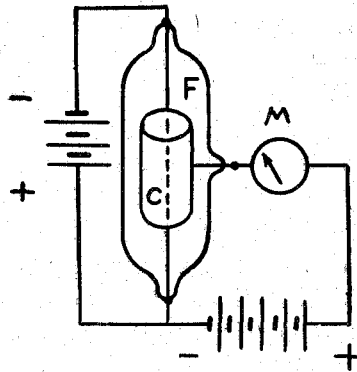


Fig. 3.

de haber calentado el filamento al rojo blanco, se eleva el potencial del cilindro a 10 ó 20 voltios sobre el del filamento, una corriente regular y acusada por un miliamperímetro, *M*, circula entre el cilindro y el filamento, a pesar de la ausencia de todo conductor. Por el contrario, el fenómeno desaparece completamente cuando se cambia el signo de la diferencia de potencial o cuando se deja enfriar el filamento. El transporte de electricidad a través del vacío comprendido entre el filamento y el cilindro no puede ser atribuido más que al desplazamiento de cargas *negativas* libres emitidas por el cuerpo incandescente y dirigidas por el campo electrostático que existe entre los electrodos.

Richardson ha demostrado que la intensidad máxima *i* de la corriente, debida a las cargas *negativas* emitidas por 1 cm.<sup>2</sup> de la superficie de un cuerpo cuya temperatura absoluta es *T*, está dada por la fórmula siguiente:

$$i = a \sqrt{T e} - \frac{b}{T} \text{ amperios por cm.}^2$$

en la cual  $a$  y  $b$  son constantes que dependen únicamente de la naturaleza del cuerpo. Para el tungsteno,  $a = 23,6 \times 10^9$ ,  $b = 5,25 \times 10^4$ , lo que corresponde a una emisión de  $2 \text{ A/cm.}^2$  a la temperatura fácilmente realizable de  $2,600^\circ$  absolutos. La forma exponencial de la ley explica por qué los fenómenos termoiónicos no pueden ser observados más que en altas temperaturas. Los cuerpos que tienen elevado el punto de fusión (carbono, tungsteno, platino, óxidos, alcalino-terrosos) dan lugar a un efecto relativamente intenso.

10. *El efecto fotoeléctrico.*—La elevación de temperatura y la aplicación de un campo electrostático intenso no son los únicos medios que nos permiten extraer electricidad negativa de un conductor. Se llega al mismo resultado, pero con una intensidad mucho más débil, iluminando la superficie del metal con un haz luminoso de longitud de onda conveniente. Este efecto fué descubierto, en 1888, por Hallwachs, que observó que un electroscopio de platillo de cinc alumbrado por una lámpara de arco se descargaba rápidamente cuando su carga era negativa; la velocidad de pérdida de las cargas positivas no era modificada por la iluminación.

Para apreciar bien el fenómeno, es cómodo servirse de un dispositivo conocido con el nombre de *célula fotoeléctrica*. Una ampolla

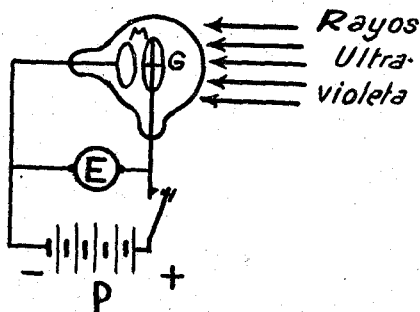


Fig. 4

de cuarzo transparente para los rayos ultravioletas, y en la cual reina un vacío elevado, contiene una placa,  $M$  (fig. 4), del metal a estudiar, y una rejilla de anchas mallas,  $G$ , paralela a la placa. Se unen estos dos electrodos a los terminales de un electrómetro,  $E$ , de débil capacidad, bien aislado, y por medio de una pila,  $P$ , se eleva el potencial de la rejilla en unos 100 voltios respecto al de la placa. Después de haber suprimido la conexión con la pila, se hace caer

sobre  $M$  un haz luminoso de longitud de onda conveniente. El electrómetro demuestra entonces que la diferencia de potencial entre  $G$  y  $M$  disminuye, lo que implica la emisión por  $M$  de cargas *negativas* que son en seguida captadas por  $G$ . El fenómeno desaparece completamente cuando se cambia el signo de la diferencia de potencial, deduciéndose de ello, que no hay emisión de cargas positivas en este caso.

En otra ocasión se estudiarán las leyes del efecto fotoeléctrico, limitándonos ahora a considerarlo como un medio de extraer de la materia corriente regulares, pero débiles (del orden de  $10^{-10}$  A/cm.<sup>2</sup>) de electricidad negativa.

11. *La radiación de los cuerpos radioactivos.*—Existe, por último, toda una clase de cuerpos que poseen las propiedad de emitir *espontáneamente* cargas positivas y negativas: son los cuerpos *radioactivos*, cuya existencia ha sido señalada por primera vez en 1896 por H. Becquerel y que han sido estudiados de manera completa por Mr. y Mme. Curie.

Una experiencia sencilla, debida a estos últimos experimentadores, permite demostrar la emisión de electricidad negativa. Un disco metálico,  $D$  (fig. 5), unido a un electrómetro está empotrado en el centro de una pieza de ebonita,  $E$ , que le rodea completamente, así

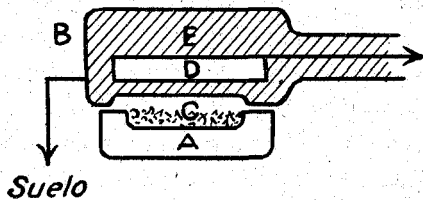


Fig. 5

como al hilo de conexión. Una envuelta metálica delgada,  $B$ , unida a tierra, recubre completamente a  $E$ . Si se expone la cara muy delgada,  $C$ , del aparato a la radiación de una sal radioactiva contenida en la cubeta de plomo,  $A$ , se observa que el electrómetro toma una carga negativa creciente con el tiempo. Esta no puede provenir más que de la absorción por  $D$  de las cargas negativas emitidas por la sal, con una energía suficiente para permitirle atravesar la envuelta  $C$ . Este fenómeno ha recibido el nombre de *radiación  $\beta$* .

El estudio de los cuerpos radioactivos ha demostrado que éstos

emiten igualmente cargas positivas (*radiación  $\alpha$* ) y ondas electromagnéticas de alta frecuencia análogas a los rayos X (*radiación  $\gamma$* ). La emisión de estas diversas radiaciones es *espontánea, discontinua* y, en los límites de las experiencias, *independiente de las condiciones físicas* (temperatura, presión).

12. *Comparación de los diversos manantiales de electricidad.*—La experiencia demuestra que las propiedades de las cargas eléctricas *negativas* son completamente independientes de la naturaleza del cuerpo de donde han sido extraídas, así como del procedimiento de extracción. Los rayos catódicos, los fenómenos termoiónicos, el efecto fotoeléctrico y la emisión radioactiva dejan libres cargas negativas cuyas estructuras y cualidades intrínsecas son rigurosamente idénticas. *La electricidad negativa aparece así como una sustancia que posee individualidad propia y enteramente distinta de la materia a la cual comunica sus propiedades.*

No les pasa igual a las cargas *positivas* cuyas propiedades eléctricas y cinemáticas están íntimamente ligadas a la naturaleza del cuerpo en donde están. Parece, pues, natural pensar que la *electricidad positiva está sustentada por un substractum material*, del cual no ha sido posible separarle hasta ahora. No se puede, pues, hablar sin ambigüedad de la carga positiva; es absolutamente preciso, para definirla completamente, indicar el manantial de que proviene, así como las condiciones de la emisión.

Desde el punto de vista cualitativo, las dos electricidades poseen dos propiedades fundamentales, cuyo descubrimiento ha tenido lugar en este siglo: *la inercia y la estructura granular.*

13. *La electricidad está dotada de inercia.*—Esta propiedad, sugerida por el poder de penetración de las cargas a través de láminas metálicas delgadas, puede ser comprobada muy sencillamente utilizando la válvula de dos electrodos empleada para el estudio de las corrientes termoiónicas. Si se aumenta progresivamente la diferencia de potencial positiva que existe entre la placa y el filamento, se ve a la primera enrojecer. Este hecho demuestra que una cierta cantidad de energía, distinta de la que proviene de la radiación calorífica del filamento, es comunicada, de manera continua, al electrodo exterior. Como las cargas negativas que circulan entre el filamento y la placa están sometidas durante su trayecto a una fuerza electrostática relativamente grande, deben adquirir durante este tiempo una *energía cinética* apreciable, que se transforma en calor en el momento de su detención por la superficie de la placa. La carga eléc-

trica se comporta, pues, como un proyectil *inerte* que calienta el blanco sometido a su impacto.

Estableceremos más adelante que la inercia de la electricidad negativa puede ser considerada como únicamente de origen electromagnético.

14. *La electricidad posee una estructura granular.*—El descubrimiento de esta propiedad es uno de los más importantes de la física moderna. Para comprobarlo citaremos una experiencia que pone en evidencia la discontinuidad de la carga, o sea, su estructura granular.

*Experiencia.*—Aprovechando la propiedad que poseen los iones de servir de centros de condensación para el vapor de agua sobresaturado, Wilson ha llegado a hacer visibles las trayectorias de las partículas electrizadas. En su aparato (fig. 6) la cámara de ionización está constituida por un cilindro, *C*, cerrado en su parte superior por un cristal, *G*, y en su parte inferior por un émbolo, *P*, que

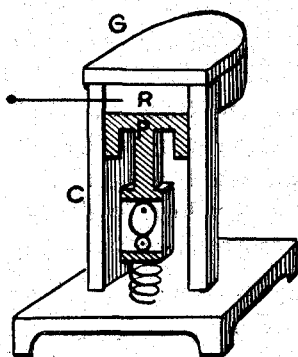


Fig. 6

un dispositivo de leva permite hacerlo descender bruscamente, lo que hace aumentar el volumen de la cámara. Un trozo de cuerpo radioactivo, *R*, está fijado en el interior de la cámara, que contiene aire saturado de vapor de agua. El enfriamiento debido a la expansión sobresatura el vapor y es posible regular la expansión de tal modo que este falso equilibrio no sea destruido por la condensación más que en los puntos en donde existen iones. Se ve entonces aparecer, en el momento de la expansión, un haz de líneas claras radiado a partir de la superficie del cuerpo radioactivo y constituidas por finas gotitas de agua que rodean a los iones producidos por las car-

gas eléctricas, cuyas trayectorias pueden así ser observadas directamente o fotografiadas. Hay que tener en cuenta en esta experiencia que el cuerpo radioactivo no emite espontáneamente más que algunas partículas por segundo.

15. *Denominación de las cargas.*—La experiencia anterior puede realizarse tanto con radiaciones  $\alpha$  como con  $\beta$ , deduciéndose de ello que la estructura granular es una propiedad común a las dos electricidades.

La carga elemental negativa ha recibido el nombre de *electrón*, propuesto por Stoney y universalmente adaptado; se designa por *electrón positivo* la carga elemental del mismo signo aislado de su soporte material.

Se reserva, por el contrario, el nombre de *ión* a toda partícula material electrizada y en estado libre.

16. *Carga elemental.*—Por diversos procedimientos, que no diremos en este folleto, se ha calculado el valor de la carga eléctrica elemental de un electrón, obteniéndose un valor medio de

$$e = 4,774 \times 10^{-10} \text{ unidades electrostáticas C. G. S.}$$

En los cálculos que siguen el electrón será considerado como una pequeña esfera de radio  $a$ , en la superficie de la cual está extendida uniformemente una carga negativa igual a  $-e$ . En *reposo*, el electrón ejerce, en un punto situado a la distancia  $r$  de su centro, un campo eléctrico radial e isótropo de intensidad igual a

$$h = - \frac{e}{K r^2}$$

siendo  $K$  el poder inductor específico del medio. La exactitud de esta hipótesis será verificada, a posteriori, por la concordancia de los resultados de los cálculos con la experiencia.

## CAPITULO II

### Ecuaciones de Maxwell.

17. *Corriente de desplazamiento.*—Antes de emprender el estudio de los fenómenos producidos por el desplazamiento de un electrón en un medio dieléctrico indefinido, es necesario recordar rápidamente

las hipótesis fundamentales que han servido de base a los cálculos de Maxwell.

Maxwell asegura primeramente que la electricidad es *incomprensible*. El flujo de electricidad que atraviesa una superficie cerrada cualquiera es, pues, contantemente nulo, lo que arrastra como corolario que el movimiento de las cargas no puede producirse más que a lo largo de un *circuito cerrado*.

Según esta teoría, la corriente de carga de un condensador *atraviesa el dieléctrico*. Para explicar la parada de la corriente al cabo de un tiempo muy corto, a pesar de la aplicación de una f. e. m. constante, Maxwell, siguiendo las sugerencias de Faraday, admite que el dieléctrico opone al paso de la electricidad una fuerza contraelectromotriz *proporcional a la cantidad de electricidad que lo ha atravesado*. El dieléctrico de un condensador cargado puede ser comparado a un resorte que equilibra la fuerza que lo flexa.

Es fácil evaluar el campo eléctrico antagonista. Consideramos una esfera conductora,  $A$ , rodeada por un dieléctrico isótropo de poder inductor específico  $K$ . Una carga,  $q$ , comunicada a la esfera engendrará en el dieléctrico el campo electrostático de Coulomb, que, sobre una esfera concéntrica a la primera de radio  $r$  tiene una dirección normal a la esfera y un valor.

$$\vec{h} = \frac{q}{K r^2}$$

Por otra parte, el principio de la incomprensibilidad exige que, en el momento de la carga, una cantidad de electricidad,  $q$ , salga de la esfera bajo forma de una *corriente de desplazamiento*, transportando por unidad de superficie la carga

$$\vec{D} = \frac{q}{s} = \frac{q}{4 \pi r^2}$$

Escribiendo que al final del desplazamiento la fuerza eléctrica  $\vec{h}_1$ , opuesta a ésta por el dieléctrico, equilibra exactamente la fuerza de Coulomb, se obtienen fácilmente la relación de Maxwell

$$\vec{h}_1 = -\vec{h} = \frac{-q}{K r^2} = \frac{-\vec{D} 4 \pi r^2}{K r^2} = -\frac{\vec{D} 4 \pi}{K} \text{ ó } \vec{D} = -\frac{K \vec{h}_1}{4 \pi} = \frac{K \vec{h}}{4 \pi}$$

Se deduce que, cuando el campo eléctrico en un punto del dieléctrico varía con la velocidad  $\frac{d\vec{h}}{dt}$ , se observa en ese punto una corriente de desplazamiento cuya intensidad por unidad de sección recta del tubo de fuerza correspondiente (densidad) estará dada en magnitud y dirección por la relación vectorial.

$$\vec{j} = \frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{K}{4\pi} \frac{d\vec{h}}{dt}$$

18. *Elección del sistema de unidades.*—Las fórmulas precedentes están expresadas en *unidades electrostáticas C. G. S.* Pero para hacer homogéneos los cálculos que van a seguir, es necesario transformar éstas tomando como base las *unidades electromagnéticas C. G. S.*, que son las que se emplean en el estudio de las corrientes de conducción.

Designemos por  $c$  la relación de la unidad electromagnética de cantidad a la unidad electrostática que, según las mejores medidas directas, es igual a

$$c = 2,998. 10^{10}$$

Es fácil establecer las expresiones de la fuerza de Coulomb, del campo eléctrico y de la corriente de desplazamiento en unidades electromagnéticas

$$\vec{f} = \frac{c^2}{K} \cdot \frac{q q'}{r^2}, \quad \vec{h} = \frac{c^2}{K} \cdot \frac{q}{r^2}, \quad \vec{j} = \frac{K}{4\pi c^2} \frac{d\vec{h}}{dt}$$

Las dos primeras son evidentes, pues interviene el producto de dos cantidades eléctricas ( $q$  y  $q'$  en la primera y la unidad en la segunda). Para la última basta repetir el cálculo de  $\vec{D}$  para ver que  $c^2$  pasa al denominador.

19. *Asimilación de las corrientes de desplazamiento a las de conducción.*—La síntesis de Maxwell se apoya todavía en una tercera hipótesis, extremadamente atrevida a primera vista, pero que ha recibido la sanción de la experiencia. Consiste en *atribuir a las co-*



rrientes de desplazamiento las propiedades eléctricas y magnéticas de las corrientes de conducción, es decir:

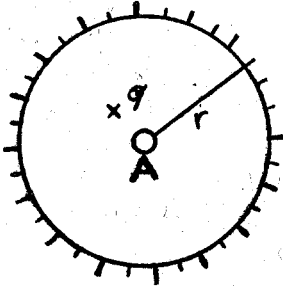


Fig. 7

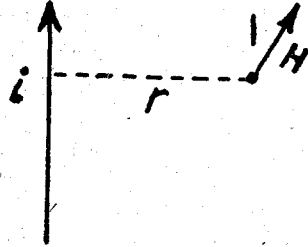


Fig. 8

A. *Circulación de la fuerza eléctrica.*—Puesto que hemos dicho que el movimiento de cargas eléctricas debe hacerse en un circuito cerrado, si tomamos la circulación de la fuerza eléctrica a lo largo no de una parte del circuito, sino de todo él, como el punto de llegada y de partida es el mismo, es decir, no hay resistencia entre ellos, aplicando la ley de Ohm podremos decir que la circulación de la fuerza eléctrica a lo largo de una línea de corriente es nula, lo que se expresa por la ecuación

$$\int_c \vec{h} \cdot d\vec{l} = 0$$

el signo  $\int_c$  indica que el contorno de integración está descrito una sola vez volviendo al punto de partida.

B. *Circulación de la fuerza magnética.*—Según la ley de Biot y Savart, el campo a una distancia  $r$  de un conductor es mod.  $\vec{H} = \frac{2i}{r}$  luego la circulación a lo largo de un conductor cerrado será

$$\int \frac{2i}{r} r d\alpha = 2i \int_0^{2\pi} d\alpha = 2i \times 2\pi = 4\pi i$$

Designemos por  $\vec{j}$  el vector densidad  $\left(\frac{d i}{d s}\right)$  de la corriente de conducción. Tendremos:

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = 4\pi \int \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

designando  $S$  una superficie *cualquiera* limitada por el contorno  $C$ , con arreglo al cual se calcula la circulación. La fórmula de Stokes, aplicada al primer miembro, da

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \int \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{n} dS = 4\pi \int \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS$$

y como esta relación debe verificarse para cualquier superficie  $S$ , podremos escribir

$$\text{rot } \vec{H} = 4\pi \vec{J}$$

20. *Ecuaciones de Maxwell relativas al dieléctrico.*—Apliquemos los resultados precedentes a las corrientes de desplazamiento que se producen en un dieléctrico isótropo de poder inductor específico,  $K$ , y de permeabilidad  $\mu$ , que no contenga ninguna carga eléctrica libre de ninguna masa magnética.

La circulación de la fuerza eléctrica a lo largo de un circuito cerrado es igual a la suma de circulaciones de sus componentes. Estas son dos, que contaremos positivamente en el sentido de la corriente de desplazamiento  $\vec{j}$

1.º La fuerza eléctrica de inducción, producida por las variaciones del flujo magnético  $\Phi$  que atraviesa el circuito y cuya circulación es igual a

$$-\frac{d\Phi}{dt} = - \int \int \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} \cdot \vec{n} dS$$

en la cual  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  representa la inducción magnética en el medio.

2.º La fuerza eléctrica  $\vec{h}_1$  opuesta por el dieléctrico a las corrientes de desplazamiento y cuya circulación es igual a

$$\int \vec{h}_1 \cdot d\vec{l} = - \int \vec{h} \cdot d\vec{l} = - \int \int \text{rot } \vec{h} \cdot \vec{n} dS$$

Debiendo ser idénticamente nula cualquiera que sea el circuito elegido, se deduce que

$$\text{rot } \vec{h} = - \frac{\delta B}{\delta t} = - \mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} \quad [1]$$

que es la primera relación de Maxwell.

La segunda relación se obtiene fácilmente aplicando a la corriente de desplazamiento la ecuación relativa a la circulación de la fuerza magnética.

$$\text{rot } \vec{H} = 4 \pi \vec{j} = \frac{K}{c^2} \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} \quad [2]$$

Las ecuaciones de derivadas parciales (1) y (2) expresan los rotaciones de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  en función de sus derivadas con relación al tiempo. Estas relaciones no permiten definir  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$ , pues ya sabemos que dos vectores, aunque sean diferentes, pueden tener el mismo rotacional. Para acabar de definirlos hay que dar la otra función de ellos, la divergencia, y para conocer las constantes de la integración hay que dar los valores de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  en el límite, es decir, en el infinito, que, desde luego, sabemos son nulos por depender de  $\frac{1}{r^2}$  que se anula para  $r = \infty$ .

La ausencia de cargas eléctricas o magnéticas en el dieléctrico impone al flujo de inducción eléctrica y magnética que sea nulo; pero, según el teorema de Ostrogradsky, dichos flujos son iguales a las integrales de las divergencias, necesitándose, por consiguiente, anularse éstas para que el flujo sea cero. Tendremos así las otras dos ecuaciones complementarias de Maxwell

$$\text{div } (K \vec{h}) = 0 \quad [3]$$

$$\text{div } (\mu \vec{H}) = 0 \quad [4]$$

21. *Ecuaciones generales de Maxwell.*—En el párrafo anterior se han estudiado las ecuaciones de Maxwell en el caso de que el medio fuera sólo dieléctrico, y ahora las vamos a generalizar para los ca-

sos en que el medio sea a la vez dieléctrico y conductor. Para ello bastará tener en cuenta en la segunda ecuación, además de la corriente de desplazamiento, la de conducción, cuya densidad será el producto del valor del campo eléctrico por la conductibilidad específica  $\sigma$  (\*).

Las dos ecuaciones de Maxwell serán ahora

$$\text{rot } \vec{h} = -\mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} \quad [1']$$

$$\text{rot } \vec{H} = 4\pi j = 4\pi \frac{\vec{h}}{c^2} \sigma + \frac{K}{c^2} \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} (**) \quad [2']$$

De las ecuaciones complementarias, la primera será la de Poisson.

$$\text{div} (K \vec{h}) = 4\pi c^2 \rho$$

siendo  $\rho$  la densidad eléctrica. La segunda, será la misma; pues aunque el medio sea en parte conductor, la densidad magnética es nula.

$$\text{div} (\mu \vec{H}) = 0 \quad [4']$$

22. *Ecuaciones de Maxwell en coordenadas cartesianas.*—Es fácil convertir las dos ecuaciones de Maxwell en coordenadas cartesianas; pues bastará expresar en éstas, los vectores de las fórmulas e igualar los coeficientes que afectan al mismo vector unitario. La [1'] se convierte en:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta h_z}{\delta y} - \frac{\delta h_y}{\delta z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\delta h_x}{\delta z} - \frac{\delta h_z}{\delta x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y} \right) \vec{k} = \\ = -\frac{\delta}{\delta t} \mu (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}) \end{aligned}$$

de donde salen tres ecuaciones

$$\begin{aligned} (*) \text{ De la fórmula de Ohm } I = \frac{E}{R} \text{ se deduce que } I = \frac{\vec{h} \cdot l}{\rho \frac{l}{s}} = \\ = \frac{\vec{h} \cdot s}{\rho} \text{ , } \vec{j} = \frac{\vec{h}}{\rho} = \vec{h} \sigma \end{aligned}$$

(\*\*) Se divide  $\vec{h}$  por  $c^2$  para expresarlo en unidades e. l. m.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta h_z}{\delta y} - \frac{\delta h_y}{\delta z} &= -\mu \frac{\delta H_x}{\delta t} \\ \frac{\delta h_x}{\delta z} - \frac{\delta h_z}{\delta x} &= -\mu \frac{\delta H_y}{\delta t} \\ \frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y} &= -\mu \frac{\delta H_z}{\delta t} \end{aligned} \right\} [1'']$$

La ecuación [2'] se convierte en

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\delta H_z}{\delta y} - \frac{\delta H_y}{\delta z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\delta H_x}{\delta z} - \frac{\delta H_z}{\delta x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\delta H_y}{\delta x} - \frac{\delta H_x}{\delta y} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} (h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k}) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} (h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k}) \end{aligned}$$

de donde salen otras tres ecuaciones.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta H_z}{\delta y} - \frac{\delta H_y}{\delta z} &= \frac{K}{c^2} \frac{\delta h_x}{\delta t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_x \\ \frac{\delta H_x}{\delta z} - \frac{\delta H_z}{\delta x} &= \frac{K}{c^2} \frac{\delta h_y}{\delta t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_y \\ \frac{\delta H_y}{\delta x} - \frac{\delta H_x}{\delta y} &= \frac{K}{c^2} \frac{\delta h_z}{\delta t} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_z \end{aligned} \right\} [2'']$$

De la [3'] se deduce

$$K \left( \frac{\delta h_x}{\delta x} + \frac{\delta h_y}{\delta y} + \frac{\delta h_z}{\delta z} \right) = 4\pi c^2 \rho \quad [3''']$$

y por último de la [4']

$$\frac{\delta H_x}{\delta x} + \frac{\delta H_y}{\delta y} + \frac{\delta H_z}{\delta z} = 0 \quad [4''']$$

23. *Propagación de los campos.*—El sistema diferencial constituido por las ecuaciones [1], [2], [3] y [4] definen completamente en el tiempo y en el espacio los vectores  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$ . Se comprende, por las ecuaciones [1] y [2] la dependencia tan estrecha que existe entre las cargas  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$ , en el sentido que, si aparece un campo  $\vec{h}$ , auto-

máticamente nace el  $\vec{H}$ , e inversamente. Esto hace pensar en que los campos deben propagarse, pues cuando en un punto nace un campo, el otro nace en el espacio que le rodea; a su vez, este nuevo que se crea hace nacer el otro en el nuevo espacio que le rodea, y así sucesivamente, es decir, los campos se van trasladando a través del dieléctrico. Ahora vamos a ver analíticamente esta propagación determinando el valor que debe tener la velocidad de propagación. Para ello vamos a resolver el sistema de ecuaciones de Maxwell. Tomemos el rotacional de los dos miembros de las ecuaciones [1] y [2].

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{h} &= -\mu \text{ rot } \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} = -\mu \frac{\delta}{\delta t} \text{ rot } \vec{H} \\ \text{rot rot } \vec{H} &= \frac{K}{c^2} \text{ rot } \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} = \frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} \text{ rot } \vec{h} \end{aligned}$$

sustituyamos en la anterior rot  $\vec{H}$  y rot  $\vec{h}$  por los valores dados por [1] y [2] y tendremos:

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{h} &= -\mu \frac{\delta}{\delta t} \frac{K}{c^2} \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} = -\frac{K\mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{h}}{\delta t^2} \\ \text{rot rot } \vec{H} &= -\frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} \mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} = -\frac{K\mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2} \end{aligned}$$

Ahora bien: sabemos que para todo vector  $\vec{A}$  se tiene:

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta_2 \vec{A}$$

y como, por otra parte, los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{h}$  son solenoidales, sus divergencias son nulas, resultando, pues, las ecuaciones:

$$\Delta_2 \vec{h} = \frac{K\mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{h}}{\delta t^2} \quad \Delta_2 \vec{H} = \frac{K\mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2} \quad [5]$$

Las cuatro ecuaciones de Maxwell han quedado reducidas a estas dos, que tienen la propiedad de no contener cada una más que

una sola de las variables. Ambas ecuaciones son de la misma forma general:

$$\Delta_2 \vec{U} = \frac{K_\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \quad [6] \quad \left[ \Delta_2 \vec{U} = \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial z^2} \right]$$

y relacionan las derivadas parciales de  $\vec{U}$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  con su derivada parcial con respecto al tiempo. Esta ecuación general expresa que la perturbación  $\vec{U}$  se propaga a través del medio con una velocidad  $c_1 = \frac{c}{\sqrt{K_\mu}}$ . Para demostrarlo consideremos que la perturbación  $\vec{U}$  es constantemente perpendicular al eje de las  $X$  (caso, como veremos después, muy corriente); es decir, que  $\vec{U}$ , aparte del tiempo, solamente depende de una coordenada,  $x$ . El laplaciano  $\Delta_2 \vec{U}$  quedará reducido a  $\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2}$ , y la ecuación [6] a

$$\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K_\mu} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2}$$

Tomando los módulos de los dos miembros tendremos:

$$\text{mod} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = \frac{c^2}{K_\mu} \text{mod} \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial x^2} \quad [7]$$

que es una ecuación escalar diferencial de segundo orden, cuya solución general es (1):

(1) Esta ecuación es similar a  $y''_{t^2} = a^2 y''_{x^2}$  o sea  $y''_{t^2} - a^2 y''_{x^2} = 0$ . Para resolverla hagamos un cambio de variables  $u = x + a t$ ,  $v = x - a t$ . La función  $y = f(x, t)$  se convertirá en  $F(u, v)$ . Se puede escribir  $dy = F'_u du + F'_v dv = F'_u (dx + a dt) + F'_v (dx - a dt) = f'_x dx + f'_t dt$  de donde  $f'_x = F'_u + F'_v$ ,  $f'_t = a(F'_u - F'_v)$ ; ahora  $df'_x = F''_{u^2} du + F''_{uv} dv + F''_{uv} du + F''_{v^2} dv = (F''_{u^2} + F''_{uv})(dx + a dt) + (F''_{v^2} + F''_{uv})(dx - a dt) = (F''_{u^2} + 2F''_{uv} + F''_{v^2}) dx + \dots dt$ ; pero como  $df'_x = f''_{x^2} dx + f''_{xt} dt$ ,  $f''_{x^2} = F''_{u^2} + 2F''_{uv} + F''_{v^2}$ .

Un cálculo análogo relativo a  $f'_t = a(F'_u - F'_v)$  conduce a  $f''_{t^2} = a^2(F''_{u^2} - 2F''_{uv} + F''_{v^2})$  y sustituyendo estos valores en la ecuación primitiva,

$$f''_{t^2} - a^2 f''_{x^2} = 4 a^2 F''_{uv}$$

$$\text{mod } \vec{U} = f_1 \left( x - \frac{c}{\sqrt{K\mu}} t \right) + f_2 \left( x + \frac{c}{\sqrt{K\mu}} t \right) \quad 8,$$

Para darnos cuenta del significado de la integral general consideremos primero solamente la integral particular

$$f_1 \left( x - \frac{c}{\sqrt{K\mu}} t \right)$$

Es fácil comprobar que si en dicha expresión sustituimos  $x$  por  $x + \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$  y  $t$  por  $t + 1$ , no varía el argumento, ni por tanto la función; es decir, en la unidad de tiempo se propaga la perturbación en el sentido positivo del eje de las  $x$  en la magnitud  $\frac{c}{\sqrt{K\mu}}$  la cual es, por consiguiente, la velocidad de propagación de la perturbación en un dieléctrico de constante dieléctrico  $K$  y permeabilidad  $\mu$ .

En el aire en particular, como  $K = \mu = 1$ , la velocidad  $c_1$  se hace igual a  $c$ , es decir, 300.000 kilómetros por segundo, la misma que la luz.

o sea que la integración de la ecuación queda reducida a la integración de la ecuación  $F''_{uv} = 0$ . Esta ecuación se puede poner bajo la forma  $P''_u = 0$  siendo  $P = F'_v$ .

La  $P''_u = 0$  tiene por integral  $P = g(v)$  con lo cual  $F = \int g(v) + C t e$  en la cual la constante puede depender de  $u$ . Vemos, pues, que todas las soluciones de la ecuación son de la forma  $F = G(v) + H(u)$ , siendo  $G$  una función arbitraria de  $v$  y  $H$  una función arbitraria de  $u$ .

Haciendo aplicación de lo anterior a la ecuación de que nos ocupamos tendremos:

$$\begin{aligned} \text{mod } \frac{\delta^2 \vec{V}}{\delta t^2} &= \frac{c^2}{K\mu} \text{mod } \frac{\delta^2 \vec{V}}{\delta x^2} \\ u &= x + \frac{C}{\sqrt{K\mu}} t & v &= x - \frac{C}{\sqrt{K\mu}} t \\ \text{mod } \vec{U} &= f_1 \left( x + \frac{C}{\sqrt{K\mu}} t \right) + f_2 \left( x - \frac{C}{\sqrt{K\mu}} t \right) \end{aligned}$$

siendo  $f_1$  y  $f_2$  funciones arbitrarias que se determinan en cada caso, según las condiciones particulares del problema.



Se ve del mismo modo que la segunda integral particular

$$f_2 \left( x + \frac{c}{\sqrt{K\mu}} t \right)$$

representa otra propagación en el sentido de las  $x$  negativas, con la misma velocidad.

*Observación.*—La velocidad de las perturbaciones no es igual a la de la luz más que para la propagación en el espacio libre. En cualquier otro caso, la duración de la propagación es siempre *mayor* que la que se calcularía admitiendo una velocidad igual a la de la luz.

Se encuentra, sin embargo, esta misma velocidad, como caso límite, en la propagación a lo largo de una superficie conductora de conductibilidad infinita y también en la propagación a lo largo de los hilos de perturbaciones sinusoidales de elevadísima frecuencia.

24. *Condiciones de paso de un medio a otro.*—Sean dos dieléctricos  $D_1$  y  $D_2$ , ilimitados y separados por una superficie plana que tomemos por plano,  $x$  o  $y$ . El poder inductor específico y la permeabilidad magnética de  $D_1$  son  $K_1$  y  $\mu_1$ , y las de  $D_2$ ,  $K_2$  y  $\mu_2$ . *Se admite* que la variación de estos elementos en la proximidad de la superficie de separación no es discontinua; esta variación tiene lugar de un modo muy rápido en el espesor de una delgada *capa de paso*.

Consideremos una onda plana de componentes  $h_x$  „  $h_z$  „  $h_y$  „ „  $H_x$  „  $H_y$  „  $H_z$  que caiga sobre la superficie de separación. Siendo las ecuaciones de Maxwell aplicables a la capa de paso, todas las derivadas que figuran en estas ecuaciones conservan valores finitos.

En las capas de paso, las derivadas  $\frac{\delta H_y}{\delta z}$  „  $\frac{\delta H_x}{\delta z}$  „  $\frac{\delta h_y}{\delta z}$  „  $\frac{\delta h_x}{\delta z}$  permanecen finitas; y como  $dz$  es infinitamente pequeño, las variaciones de  $H_y$  „  $H_x$  „  $h_y$  „  $h_x$  „ deben ser también muy pequeñas.

Es decir, que para  $z = 0$  se tiene:

$$H_x = H'_x \text{ „ } H_y = H'_y \text{ „ } h_x = h'_x \text{ „ } h_y = h'_y \quad [\alpha]$$

Por otra parte, las ecuaciones de Maxwell expresan la invariabilidad del flujo de  $K h$  y  $\mu H$ , lo que exige

$$K_1 h_z = K_2 h'_z \quad \text{y} \quad \mu_1 H_z = \mu_2 H'_z \quad [\beta]$$

De estas fórmulas se deducen las leyes de reflexión y refracción,

que no las demostraremos; pero que son las mismas que las de óptica, es decir, que el ángulo de incidencia es igual al de reflexión, y que la relación de los senos de los ángulos de incidencia y refracción es igual a la relación de velocidad en cada medio. Ahora bien: si la permeabilidad  $\mu$  es igual a 1 en los dos medios, la relación de velocidades

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\frac{c}{\sqrt{K_1}}}{\frac{c}{\sqrt{K_2}}} = \frac{\sqrt{K_2}}{\sqrt{K_1}}$$

o sea, que dicha relación es inversa de la relación de las raíces cuadradas de los poderes inductores específicos; o sea, que si el poder inductor del segundo medio es menor, el rayo refractado se separa más de la normal a la superficie.

### CAPITULO III

#### El electrón con movimiento uniforme.

25. *Campo electro-magnético producido por un electrón que se desplaza con un movimiento uniforme.*—Hasta ahora, para establecer las ecuaciones de Maxwell hemos supuesto originados con anterioridad los campos eléctricos y magnéticos, deduciendo de sus ecuaciones las formas de su propagación. Ahora vamos a estudiar un primer procedimiento para engendrar el campo inicial. Este procedimiento va a consistir en el desplazamiento de un electrón, con un movimiento uniforme de velocidad  $\vec{v}$ .

Asimilaremos el electrón a una pequeña esfera de radio,  $a$ , que lleve una carga,  $-e$ , uniformemente repartida sobre su superficie, y esté animada de un movimiento uniforme de velocidad  $\vec{v}$ .

Sea  $A$  la posición del electrón en el instante  $t = 0$ . Nos proponemos determinar la dirección y la magnitud de los campos producidos por la carga móvil en un punto  $M$ , situado a una distancia  $r$  del electrón y en una dirección que forma un ángulo  $\alpha$  con la velocidad  $\vec{v}$ .

El campo eléctrico, correspondiente al paso del electrón por  $A$ , no se establece en  $M$  hasta  $\frac{r}{c_1}$  después. Para un observador, inmó-

vil con relación al dieléctrico, el campo está dirigido según  $MA$ ; se ve inmediatamente que está constantemente contenido en el plano  $P$ , determinado por el punto  $M$  y la velocidad  $\vec{v}$ . El vector  $\frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$  goza de la misma propiedad, puesto que el incremento de  $\vec{h}$  será un vec-

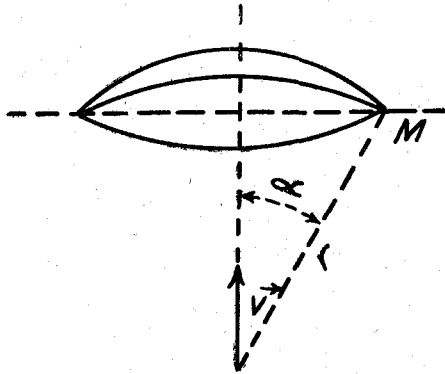


Fig. 9

tor contenido en  $P$ , e igual le pasará a este incremento aunque sea en un tiempo infinitamente pequeño. Por estar  $\frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$  contenido en el plano  $P$ , el vector  $\vec{H}$  es normal al plano. En efecto: el flujo de  $\frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$  es nulo a través de todo contorno cerrado contenido en  $P$ ; y según la fórmula de Stokes y la segunda de Maxwell:

$$\int_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \int \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{K}{c^2} \int \int \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} \cdot \vec{n} \, ds = 0$$

Esta relación no puede verificarse idénticamente más que si  $\vec{H}$  es normal al plano  $P$ . Aplicando el mismo razonamiento a un contorno circular que pase por  $M$  y sea perpendicular a  $P$ , y que tenga por eje de simetría a  $\vec{v}$ , se obtiene fácilmente el valor de  $\vec{H}$ , que, a lo largo de la circunferencia, es constante y tangente a ella. Por consiguiente:

$$\int_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \operatorname{sen} \alpha H = \frac{K}{c^2} \iint \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} \cdot \vec{n} ds =$$

$$= \frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} \iint \vec{h} \cdot \vec{n} ds \quad [9]$$

Para evaluar el flujo de  $\vec{h}$  a través de este círculo consideremos el casquete esférico de centro  $A$  y de base  $C$ . En todos sus puntos el campo eléctrico es radial e igual a  $-\frac{c^2 e}{K r^2}$ ; por consiguiente (\*),

$$\frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} \iint \vec{h} \cdot \vec{n} ds = \frac{K}{c^2} \frac{d}{dt} \left[ -\frac{c^2 e}{K r^2} 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha) \right] =$$

$$= -2\pi e \operatorname{sen} \alpha \frac{d\alpha}{dt} \quad [10]$$

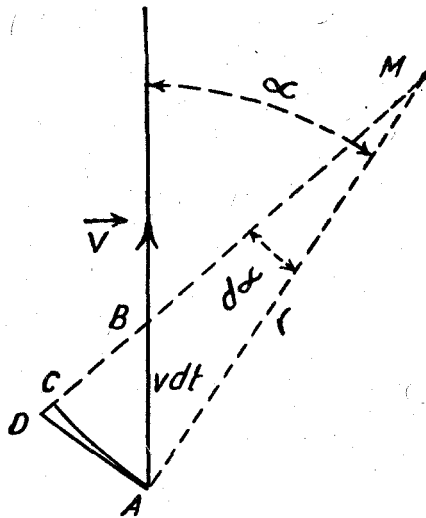


Fig. 10

pero como (fig. 10):  $AC = AD$  despreciando un elemento de segundo orden, tendremos:  
de donde,

(\*) El área del casquete esférico es  $2\pi r h = 2\pi r (r - r \cos \alpha) = 2\pi r^2 (1 - \cos \alpha)$ .

$$r d\alpha = v dt \operatorname{sen} \alpha \quad \text{ó} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v \operatorname{sen} \alpha}{r}$$

y substituyendo en [10]

$$\frac{K}{c^2} \frac{\delta}{\delta t} \iint \vec{h} \cdot \vec{n} ds = -2\pi r \operatorname{sen} \alpha \frac{e v \operatorname{sen} \alpha}{r^2}$$

y teniendo en cuenta el primer miembro de [9] y la constancia y tangencia de  $\vec{H}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} \vec{H}_r \int_c d\vec{l} &= H 2\pi r \operatorname{sen} \alpha = -2\pi r \operatorname{sen} \alpha \frac{e v \operatorname{sen} \alpha}{r^2} \\ \operatorname{mod} \vec{H}_{t=\frac{r}{c_1}} &= -\frac{e v \operatorname{sen} \alpha}{r^2} \end{aligned} \quad [11]$$

El signo — indica que, con relación al vector  $\vec{v}$ ,  $\vec{H}$  está orientado en el sentido de las rotaciones negativas (\*). El índice de  $\vec{H}$  expresa que el campo magnético se establece en  $M$  con un retardo igual al tiempo que tarda la perturbación en franquear la distancia  $AM$ . El efecto de este retardo no se hace apreciable más que cuando la velocidad de la partícula no es muy pequeña respecto de la de la perturbación.

26. *Localización de energía en el dieléctrico.*—En la concepción de Maxwell, el paso de la corriente de desplazamiento produce en el dieléctrico una *tensión o fuerza contraelectromotriz* capaz de desplazar las cargas en sentido inverso cuando se suprime el campo polarizante. Se puede, pues, admitir la existencia de una *energía potencial* localizada en los elementos del dieléctrico.

Sea (fig. 11) un tubo de corriente de desplazamiento de sección recta  $ds$ , limitado en dos superficies equipotenciales que corresponden a una diferencia de potencial  $dV = h dl$ .

(\*) Esto es natural, pues hay que tener en cuenta que respecto a la velocidad de los electrones, la corriente eléctrica tiene sentido opuesto y, por tanto, si se toma la dirección de ésta,  $\vec{H}$  tiene el sentido de la rotación positiva.

En el momento del establecimiento del campo eléctrico, una carga

$$q = D d s = \frac{K h}{4 \pi c^2} d s$$

se desplaza a lo largo del tubo. En el momento de la supresión del campo, la misma carga, desplazándose en sentido inverso, sufrirá,

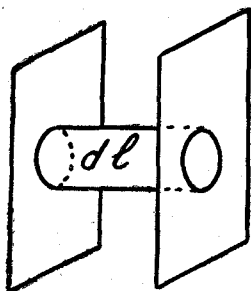


Fig 11

a lo largo del trozo de tubo considerado, una caída de potencial cuyo valor medio será:

$$\frac{dV}{2} = \frac{1}{2} h dl$$

La energía correspondiente

$$W_e = \frac{K h^2}{8 \pi c^2} d s dl = \frac{K h^2}{8 \pi c^2} d \tau \quad [12] \quad (h \text{ en unidades e. l. m.})$$

podrá ser considerada como restituída por el dieléctrico.

Se puede desarrollar una teoría completamente igual para el campo magnético, puesto que obedece a leyes de la misma forma que las del campo eléctrico; se encuentra entonces que la energía localizada en un elemento de volumen  $d \tau$  es:

$$W_m = \frac{\mu H^2}{8 \pi} d \tau \quad [13]$$

La desaparición del factor de dimensión  $\frac{1}{c^2}$  es debida a que el

campo magnético está expresado en su sistema natural de unidades:

27. *Acciones de un campo eléctrico y magnético sobre un electrón en movimiento.*—Por no hacer este trabajo interminable no daremos la demostración, pero sí los resultados de estas acciones en dos casos particulares:

*Todo campo eléctrico perpendicular a la dirección de marcha de un electrón ejerce sobre éste una acción en el sentido del campo.* Es decir: que si en la figura 12 se supone que en la dirección  $A D$  camina un electrón con la velocidad uniforme  $\vec{v}$ , y que  $\vec{h}$  es el campo eléctrico, el electrón, bajo la acción de este campo, se desvía de esa dirección y sigue la trayectoria  $A C$ , o sea, que actúa lo mismo que un cuerpo material; es decir, que se puede atribuir al electrón una

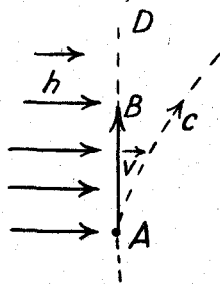


Fig. 12

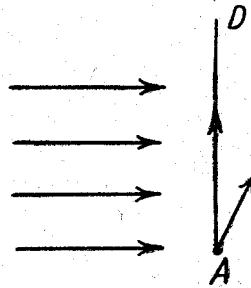


Fig. 13

cierta masa. Respecto de la acción de un campo magnético, puede decirse que:

*Todo campo magnético perpendicular a la dirección de marcha de un electrón ejerce sobre éste una acción tal, que forma con la dirección de marcha y con la dirección del campo un triedro negativo.* Es decir: que si en la figura 13 se supone que el electrón camina en la dirección  $A D$  y que  $\vec{H}$  es el campo magnético, el electrón, bajo la acción de este campo, se desvía en la dirección  $F$ , situada en un plano perpendicular al del papel y hacia detrás.

28. *Masa y radio de un electrón.*—Por diversos experimentos y medidas, que no vamos a describir por la razón indicada en el párrafo anterior, se ha encontrado que

$$\text{Masa del electrón: } m_0 = 0,90 \cdot 10^{-27} \text{ gramos}$$

y

$$\text{Radio del electrón: } a = 1,9 \times 10^{-13} \text{ cms.}$$

Esta última cantidad es del orden de  $1/100.000$  del radio atómico, o, si se prefiere, el átomo y el electrón están en la misma relación de dimensiones que una esfera de 100 metros de diámetro y una cabeza de alfiler.

29. *Oscilógrafos catódicos.*—La extrema pequeñez de la masa del electrón, o sea, su casi anulación de masa, permite a éste adquirir una desviación, aunque la acción del campo desviante dure poquísimos; o sea, que se puede decir que el haz electrónico es capaz de obedecer fielmente a las variaciones de campos extremadamente rápidos.

Toda una serie de aparatos destinados al estudio de los fenómenos eléctricos de muy corta duración están basados en esa propiedad.

Bajo el efecto de la descarga eléctrica en el vacío, el cátodo de un tubo de Crookes emite un haz de partículas negativas que se propagan en línea recta con una gran velocidad. Un pequeño diafragma hace que el haz que pase sea muy pequeño, y este pequeño haz impresiona una película fotográfica.

Si se quiere estudiar la variación de una corriente oscilante se dispone en el trayecto del pequeño haz una bobina recorrida por la

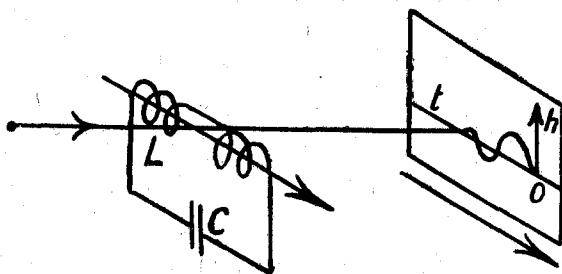


Fig. 14

corriente, cuyo eje es normal al haz (fig. 14). Este se desvía en una dirección normal al campo magnético creado por la bobina, y la traza del haz describe en la película una pequeña recta.

Imprimiendo a la película fotográfica un movimiento uniforme en la dirección perpendicular a esta recta, la traza del haz inscribe directamente la curva de variación, en función del tiempo, del campo magnético debido a la corriente.

De esto es fácil deducir la variación de corriente, que le es proporcional. Si se quiere estudiar la variación de tensión en las bor-



nas de un condensador, se dispone éste en el trayecto del haz (figura 15). Se puede obtener por este procedimiento el registro de oscilaciones, cuya frecuencia alcanza el millón por segundo ( $\lambda = 300$  metros).

Para frecuencias más elevadas no es posible alcanzar una velo-

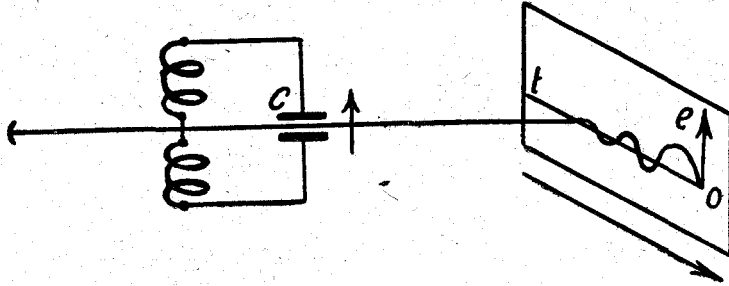


Fig. 15

cidad suficiente de la película fotográfica, y hay que recurrir a otros procedimientos.

30. *Potenciales vector y escalar producidos por un electrón en movimiento.*—Supondremos, como anteriormente, que la velocidad del electrón es pequeña respecto de  $c_1$ , y tomaremos como sistema de referencia ejes fijos en el dieléctrico de poder inductor específico  $k$  y de permeabilidad  $\mu$ , en el cual se desplaza el electrón.

Como seguimos suponiendo que en el dieléctrico no hay cargas magnéticas (pues sabemos que si una carga positiva magnética aparece nace inmediatamente otra igual negativa, y en total la carga será nula), la ecuación [4] de Maxwell seguirá verificándose:

$$\operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0$$

y ya sabemos que siempre que esto se verifica hay un nuevo vector, que llamaremos  $\vec{F}$ , para el cual

$$\mu \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{F} \quad [14]$$

Reemplazamos  $\vec{H}$  por su valor, deducido de la [1] de Maxwell, y tendremos:

$$\text{rot } \vec{h} + \text{rot } \frac{\delta \vec{F}}{\delta t} = \text{rot} \left( \vec{h} + \frac{\delta \vec{F}}{\delta t} \right) = 0$$

lo que expresa que  $\vec{h} + \frac{\delta \vec{F}}{\delta t}$  deriva de un potencial; se puede, pues, escribir:

$$\vec{h} + \frac{\delta \vec{F}}{\delta t} = -\text{grad } U \quad [15]$$

$U$  es el *potencial escalar* definido en electrostática. Llevando a la segunda ecuación [2] de Maxwell el valor de  $\vec{H}$ , deducido de [14], y el de  $\vec{h}$ , deducido de [15], se tiene:

$$\text{rot rot } \vec{F} = \frac{K \mu}{c^2} \left( \text{grad } \frac{\delta U}{\delta t} + \frac{\delta^2 \vec{F}}{\delta t^2} \right)$$

o

$$\frac{K \mu}{c^2} \left( \frac{\delta^2 \vec{F}}{\delta t^2} + \text{grad } \frac{\delta U}{\delta t} \right) + \Delta_2 \vec{F} - \text{grad div } \vec{F} = 0 \quad [16]$$

de igual modo se deduce de la tercera relación de Maxwell:

$$-\text{div grad } U - \frac{\delta}{\delta t} \text{div } \vec{F} = -\Delta_2 U - \frac{\delta}{\delta t} \text{div } \vec{F} = 0 \quad [17]$$

Del vector  $\vec{F}$  no se conoce hasta ahora más que el valor de su rotacional, y ya sabemos que este dato no basta para conocer su valor y que es preciso otro; por ejemplo, su divergencia. Pues bien; Lorenz eligió el valor de esa divergencia de manera que resultasen simétricas las fórmulas [16] y [17], y escribió:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{K \mu}{c^2} \frac{\delta U}{\delta t}$$

Se obtiene entonces este sistema:

$$\Delta_2 U = \frac{K \mu}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{,,} \quad \Delta_2 \vec{F} = \frac{K \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2} \quad [18]$$

La forma de estas ecuaciones demuestra que el *potencial escalar*  $U$  y el *potencial vector*  $\vec{F}$  se propagan por ondas en el dieléctrico con la misma velocidad  $c_1 = \frac{c}{\sqrt{K \mu}}$ .

En un punto situado a una distancia  $r$  de un electrón animado, en el instante inicial, de una velocidad  $\vec{v}$ , los potenciales se establecen con un retardo  $t = \frac{r}{c}$ ; tienen por valor:

$$U = -\frac{c^2 e}{K r} \quad [19] \quad \vec{F} = -\frac{\mu e \vec{v}}{r} \quad [20]$$

El *potencial vector*  $\vec{F}$  es paralelo a la velocidad del electrón y dirigido en sentido contrario de ella.

En efecto: por ser  $\vec{v}$  constante, la intensidad de corriente será constante, y  $\vec{H}$  será independiente de  $t$ ; y  $\vec{F}$  lo será también por [14]; por tanto,  $\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = 0$  y  $\vec{h} = \text{grad } U$ ; substituyendo  $U$  por el valor que vamos a demostrar, resulta:  $\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{c^2 e}{K r^2}$ , que es efectivamente  $\vec{h}$ .

Respecto de  $\vec{F}$  tendremos que  $\mu \vec{H} = \text{rot } \vec{F}$ . Comprobemos que el valor  $\vec{F} = -\frac{\mu e \vec{v}}{r}$  verifica a esta ecuación de Maxwell. Según la fórmula,  $\vec{F}$  es paralela a  $\vec{v}$  y de sentido contrario; sus componentes, según los ejes, serán:

$$F_x = 0$$

$$F_y = 0$$

$$F_z = -\frac{\mu e v}{r}$$

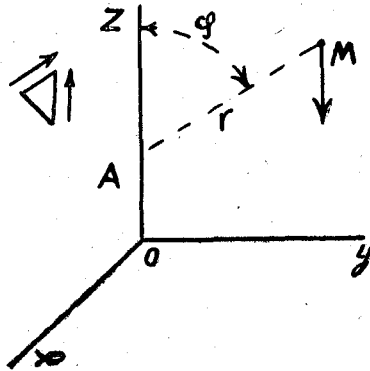


Fig. 16

y

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \left( \frac{\delta F_z}{\delta y} - \frac{\delta F_y}{\delta z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\delta F_x}{\delta z} - \frac{\delta F_z}{\delta x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\delta F_y}{\delta x} - \frac{\delta F_x}{\delta y} \right) \vec{k} = \\ &= \frac{\delta F_z}{\delta y} \vec{i} - \frac{\delta F_x}{\delta x} \vec{j} = \left( + \frac{\mu e v}{r^2} \frac{\delta r}{\delta y} \right) \vec{i} - \left( - \frac{\mu e v}{r^2} \frac{\delta r}{\delta x} \right) \vec{j} \end{aligned}$$

pero  $\frac{\delta r}{\delta y} = \text{sen } \varphi$  (\*) y  $\frac{\delta r}{\delta x} = 0$ ; luego  $\text{rot } \vec{F} = - \frac{\mu e v}{r^2} \text{sen } \varphi \vec{i}$   
que es efectivamente el valor de  $\vec{H}$ , encontrado en la fórmula [11].

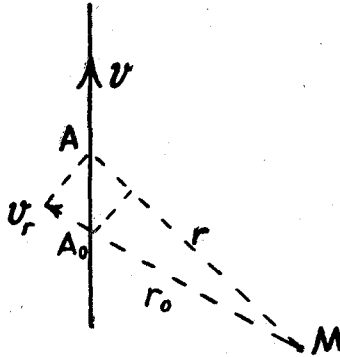


Fig. 17

31. *Potenciales retardados de Lorenz.*—Consideremos un elec-

(\*)  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $2 \frac{\delta r}{\delta y} r = 2y$ ,  $\frac{\delta r}{\delta y} = \frac{y}{r}$ .

trón  $A$  (fig. 17) animado, en el instante  $t = 0$ , de una velocidad  $v$ , débil respecto a  $c_1$ . El valor, en un punto  $M$ , situado a una distancia  $r$  de  $A$ , de los potenciales producidos por la carga móvil, está determinado por la onda de potencial que llega a  $M$  en la época  $t = 0$ . (Supondremos para mayor facilidad, y por ser caso de utilidad en la práctica, que la trayectoria del electrón sea rectilínea.) La onda que llega a  $M$  en el momento  $t = 0$  es la que ha partido del punto  $A_0$  de la trayectoria del electrón, situado a la distancia  $r_0$  de  $M$ , y tal que el electrón ha pasado por allí en la época  $-\Delta t = -\frac{r_0}{c_1}$ .

Se ve fácilmente que, despreciando diferenciales de segundo orden:

$$r_0 = r - v_r \delta t \approx r \left( 1 - \frac{v_r}{c_1} \right) \quad [21]$$

siendo  $v_r$  la componente radial de la velocidad del electrón, contada positivamente desde  $M$  hacia  $A$ . Se obtiene entonces, para los valores de  $U$  y  $\vec{F}$  en el instante  $t = 0$ :

$$U = -\frac{c^2 e}{K r \left( 1 - \frac{v_r}{c_1} \right)}, \quad \vec{F} = -\frac{\mu e \vec{v}}{r \left( 1 - \frac{v_r}{c_1} \right)} \quad [22]$$

Estas funciones, introducidas por primera vez por Luis Lorenz, han recibido los nombres de *potenciales (escalar y vector) retardados*; deben ser sustituidos a los potenciales de Newton y Maxwell en todos los casos en que la velocidad de variación de los fenómenos eléctricos o magnéticos estudiados no es muy pequeña con respecto a la velocidad de propagación de las perturbaciones.

## CAPITULO IV

### El electrón acelerado.

32. *Campos eléctrico y magnético producidos por un electrón acelerado.*—Ya hemos definido los campos eléctricos y magnéticos producidos por un electrón en movimiento uniforme; vamos ahora

a determinar los producidos por un electrón sometido a una aceleración. Seguiremos suponiendo que la velocidad del electrón es pequeña respecto de  $c_1$ .

Vamos a deducir los valores de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  por medio de las ecuaciones [14] y [15] del párrafo 28:

$$\vec{h} = \text{grad } U - \frac{\delta \vec{F}}{\delta t} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{F} \quad [23]$$

Limitémonos al caso en que  $\frac{v_r}{c_1}$  es muy pequeño; el paréntesis del denominador de las fórmulas del párrafo 29 se reducirá a la unidad, y supongamos además que la velocidad  $v$  varíe de un punto a otro de la trayectoria, con lo cual la velocidad de la carga en  $A_0$  (momento  $t - \delta t$ ) se obtendrá aplicando la fórmula de Taylor a la función  $v_0 = f(t)$

$$f(t - \delta t) = f(t) - \delta t \frac{\delta f(t)}{\delta t} + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{\delta^2 f(t)}{\delta t^2}$$

pero

$$f(t) = v, \quad \frac{\delta f(t)}{\delta t} = \frac{\delta v}{\delta t} = \gamma$$

aceleración

$$\frac{\delta^2 f(t)}{\delta t^2} = \frac{\delta \gamma}{\delta t}$$

y

$$v_0 = v - \gamma \delta t + \frac{(\delta t)^2}{2} \frac{\delta \gamma}{\delta t} \dots \quad [24]$$

fórmula que, en la mayor parte de los casos, puede reducirse a sus dos primeros términos.

Determinemos  $\vec{h}$ :

$$\begin{aligned} \text{grad } U &= \frac{\delta U}{\delta r} = \frac{\delta}{\delta r} \left[ -\frac{c^2 e}{K r \left(1 - \frac{v_r}{c_1} O\right)} \right] = \\ &= \frac{c^2 e}{K} \left[ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{v_r}{c_1}} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\gamma_r}{c_1} \cdot \frac{\delta t}{\delta r} \right] = -\frac{c^2 e}{K} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\gamma_r}{r c_1^2} \right] \quad [25] \end{aligned}$$

pues

$$\frac{\delta t}{\delta r} = \frac{1}{c_1} \quad , \quad \frac{\delta \vec{F}}{\delta t} = -\frac{\mu e \vec{\gamma}}{r}$$

de donde

$$\vec{h} = -\frac{c^2 e}{K} \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{\gamma_r}{r c_1^2} \right] + \frac{\mu e \vec{\gamma}}{r}$$

Introduciendo la componente  $\gamma_t$  de la aceleración perpendicular al radio vector, y observando que

$$\vec{\gamma}_t = \vec{\gamma} - \vec{\gamma}_r \quad \text{y} \quad c_1 = \frac{c}{\sqrt{K \mu}}$$

se tiene:

$$\vec{h} = -\frac{c^2 e}{K r^2} + \frac{\mu e \vec{\gamma}_t}{r} \quad [26]$$

El primer término representa la fuerza eléctrica de Coulomb, dirigida hacia el centro de la superficie de onda; el segundo corresponde a una fuerza ortogonal ( $\gamma_t$ ) a la anterior, y contenida en el plano de las  $z y$ .

El campo magnético del electrón acelerado es igual al rotacional del potencial vector, multiplicado por el factor constante  $\frac{1}{\mu}$ . Tomaremos los ejes marcados en la figura 18. Como  $\vec{F}$ , según la fórmula

la [22], es paralelo y de sentido contrario a  $\vec{v}$ , sus componentes serán:

$$F_x = 0, F_y = 0, F_z = -\frac{\mu e v}{r \left(1 - \frac{v_r}{c_1}\right)}$$

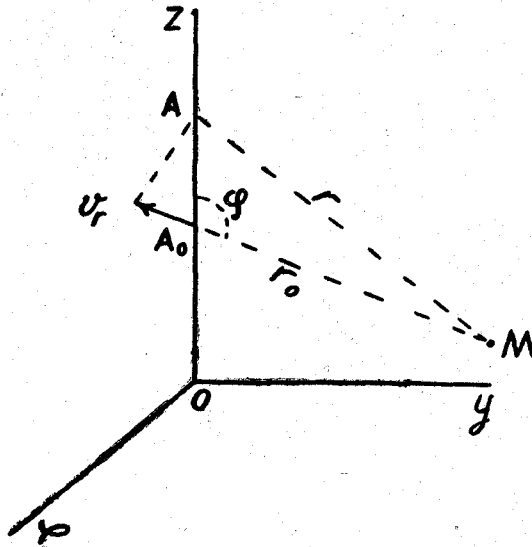


Fig. 18

y las de  $\vec{H}$ :

$$H_x = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\delta F_z}{\delta y} - \frac{\delta F_y}{\delta z} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{\delta F_z}{\delta y}, H_y = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\delta F_x}{\delta x} - \frac{\delta F_z}{\delta x} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{\delta F_z}{\delta x} = 0, H_z = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\delta F_y}{\delta x} - \frac{\delta F_x}{\delta y} \right) = 0$$

de donde  $\vec{H}$  es paralelo al eje de la  $x$  y tiene por valor, llamando  $\varphi$  al ángulo  $\widehat{Z A_0 M}$  y teniendo en cuenta  $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \text{sen } \varphi$ :

$$H_x = \frac{1}{\mu} \frac{\delta F_z}{\delta y} = \frac{1}{\mu} \frac{\delta F_z}{\delta r} \cdot \frac{\delta r}{dy} = \frac{1}{\mu} \left( -\frac{\mu e v}{r^2} - \frac{\mu e v}{c_1 r} \right) \text{sen } \varphi$$



Introduciendo la componente de la velocidad  $v_t$ , perpendicular al radio vector, esta relación se escribe:

$$H = \frac{e v_t}{r^2} - \frac{e \gamma t}{c_1 r} \quad [27]$$

El primer término representa el campo magnético, debido al movimiento uniforme del electrón.

Es necesario orientar claramente en el espacio los diversos componentes de los campos. Consideremos un electrón  $E$  (fig. 19) cuya velocidad y aceleración sean paralelas y de sentido contrario. La onda electromagnética se propaga según el radio, alejándose de la

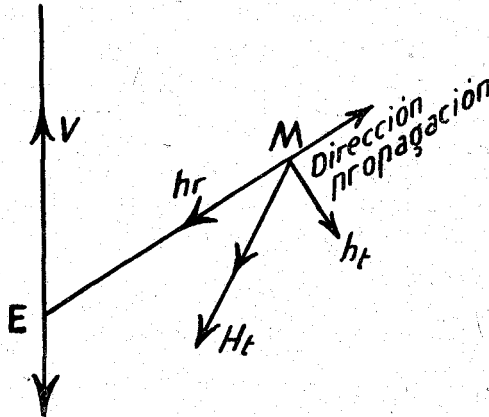


Fig. 19

partícula. El campo eléctrico posee una componente radial (Coulomb) dirigida hacia la carga, y una componente tangencial perpendicular al radio vector. El campo magnético posee dos componentes tangenciales, perpendiculares las dos al plano formado por el radio vector y la velocidad, y girando en sentido directo, es decir, en el caso de la figura, perpendicular al papel y hacia afuera.

Se ve inmediatamente que la componente tangencial de  $\vec{h}$ , la componente tangencial de  $\vec{H}$  proporcional a  $\vec{\gamma}$ , y la dirección de propagación, tomadas en este orden, forman un triedro trirectángulo orientado negativamente.

33. *Onda de aceleración.*—A una gran distancia de la partícula-

la, los campos eléctrico y magnético se reducen prácticamente a su componente proporcional a la aceleración, la cual varía en razón inversa de la distancia; las otras componentes se debilitan mucho más, pues varían en razón inversa del cuadrado de la distancia. Se llama *onda de aceleración* la perturbación que propaga los dos vectores ortogonales y transversales.

$$h = \frac{\mu e \gamma_t}{r} \quad ,, \quad H = - \frac{e \gamma_t}{c_t \gamma} \quad [28]$$

La densidad de energía localizada por la onda en el dieléctrico es (párrafo 24) :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= \frac{dW_e}{d\tau} + \frac{dW_m}{d\tau} = \frac{K}{8\pi c^2} \frac{\mu^2 c^2 \gamma_t^2}{r^2} + \\ &+ \frac{\mu}{8\pi} \cdot \frac{c^2 \gamma_t^2}{r^2} \frac{K\mu}{c^2} = \frac{K\mu^2 c^2 \gamma_t^2}{4\pi c^2 r^2} \end{aligned} \quad [29]$$

se ve, pues, que las energías eléctrica y magnética son iguales.

34. *Teorema de Poynting.*—Es interesante calcular la energía transportada por una onda electromagnética. Consideremos en el dieléctrico un volumen,  $v$ , limitado por una superficie,  $s$ . El aumento, por unidad de tiempo, de la energía contenida en  $v$  es:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \iiint_v \frac{K}{8\pi c^2} h^2 d\tau + \iiint_v \frac{\mu}{8\pi} H^2 d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_v \left( \frac{K}{c^2} \overrightarrow{h} \frac{\delta \overrightarrow{h}}{\delta t} + \mu \overrightarrow{H} \frac{\delta \overrightarrow{H}}{\delta t} \right) d\tau \end{aligned}$$

reemplazando  $\frac{\delta \overrightarrow{h}}{\delta t}$  y  $\frac{\delta \overrightarrow{H}}{\delta t}$  por sus expresiones, sacadas de las ecuaciones de Maxwell,

$$\frac{\delta \overrightarrow{h}}{\delta t} = \frac{c^2}{K} \text{rot } \overrightarrow{H} \quad ,, \quad \frac{\delta \overrightarrow{H}}{\delta t} = - \frac{1}{\mu} \text{rot } \overrightarrow{h}$$

se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{4\pi} \iiint (\vec{h} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{h}) d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint \text{div} (\vec{H} \times \vec{h}) d\tau \end{aligned} \quad [30]$$

o, según la fórmula de Ostrogradsky:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \iint (\vec{H} \times \vec{h}) \cdot \vec{n} ds \quad [31]$$

La derivada con respecto al tiempo de la energía localizada en un volumen  $v$  es igual al flujo a través de la superficie limitrofe del vector

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi} (\vec{H} \times \vec{h}). \text{ Vector radiante de Poynting.}$$

Si se considera el vector de Poynting como representando la velocidad con que se desplazaría un líquido ficticio, entrando o saliendo de un volumen limitado por una superficie cerrada, la cantidad de líquido que entra o que sale durante un tiempo  $dt$  es igual al incremento positivo o negativo de la energía electromagnética contenida en el interior de este volumen.

Todo pasa como si la energía fuera un fluido circulando en el espacio, según el vector de Poynting, o, más exactamente, cuyo camino fuese la envolvente de los vectores de Poynting.

35. *Energía transportada por la onda de aceleración.*—El teorema de Poynting aclara bien el papel de la onda de aceleración. Tomemos como superficie de integración la superficie misma de la onda tomada en el instante  $t$ ; ésta, es una esfera que está prácticamente centrada con la partícula.

La componente normal de  $\vec{P}$  no depende más que de las componentes de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  tangentes a la superficie de onda, pues la componente de  $\vec{h}$  radial al multiplicarla vectorialmente por las de  $\vec{H}$  producirá un vector tangente a la superficie de onda y, por consiguiente, sin componente normal; por ello, para hallar el valor de  $P_n$  multiplicaremos la componente tangencial de  $\vec{h}$  por las dos componentes tan-

genciales de  $\vec{H}$ , pero como son perpendiculares entre sí, su producto vectorial quedará reducido al producto de sus módulos

$$P_n = \frac{\mu e \gamma_t}{4 \pi r} \left( \frac{e v_t}{r^2} - \frac{e \gamma_t}{c_1 r} \right) (*) = \frac{\mu e^2 \gamma_t}{4 \pi r^2} \left( \frac{v_t}{r} - \frac{\gamma_t}{c_1} \right) [32]$$

y el flujo de  $P$  a través de la superficie considerada es

$$\begin{aligned} (v_t = v \operatorname{sen} \varphi, \text{ y } \gamma_t = \gamma \operatorname{sen} \varphi) \text{ ,, } \frac{dW}{dt} &= \iint \vec{P} \cdot \vec{n} \, ds = \\ &= 2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\mu e^2 \gamma}{4 \pi r^2} \left( \frac{v}{r} - \frac{\gamma}{c_1} \right) \operatorname{sen}^2 \varphi \, r^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\Theta (**)= \\ &= \frac{2 \mu e^2 \gamma}{4 \pi} \left( \frac{v}{r} - \frac{\gamma}{c_1} \right) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi \, d\Theta \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi \, d\Theta &= \int_0^\pi d\Theta \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^3 \varphi \, d\varphi = \\ &= \pi \left[ -\frac{\cos \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi}{3} - \frac{2}{3} \cos \varphi \right]_0^\pi = \frac{4 \pi}{3} \text{ ,, y, } \frac{dW}{dt} = \\ &= \frac{2 \mu e^2 \gamma}{3} \left( \frac{v}{r} - \frac{\gamma}{c_1} \right) - \frac{2 \mu e^2 \gamma^2}{3 c_1} - \frac{2 \mu e^2 v \gamma}{3 r} \quad [33] \end{aligned}$$

admitiendo que  $v$  y  $\gamma$  tienen la misma dirección y expresando por  $\varphi$  el ángulo del radio vector con la aceleración. El primer término corresponde al producto vectorial de las dos componentes de la onda de aceleración; representa la energía transportada por ésta, energía constante puesto que su expresión es independiente del radio de la onda. El segundo término decrece con la distancia y no puede contarse con él nada más que en las proximidades de la antena. En efecto, la relación del primero al segundo es igual a  $\frac{r}{c_1} \cdot \frac{\gamma}{v}$ , en la cual, aunque  $c_1$  es grande,  $v$  es pequeña, con lo cual los factores del de-

(\*) No se ponen las flechas a los vectores para indicar que se toman los módulos y el producto es escalar.

(\*\*) Un elemento de superficie esférica puede ponerse bajo la forma  $r \, d\varphi \, \operatorname{sen} \varphi \, r \, d\Theta = r^2 \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\Theta$

nominador se compensan, y en total es proporcional a  $r$ , o sea, a grandes distancias, el primer término será el único que interviene (ya veremos más adelante lo que consideraremos como distancias grandes).

36. *Masa de electrón.*—El principio de conservación exige que la energía radiada sea suministrada por las fuerzas que aceleran al electrón. Si se calcula el flujo del vector de Poynting a través de una esfera de radio  $a$  coincidiendo con la superficie del electrón se ve, refiriéndose al párrafo precedente, que la energía radiada por unidad de tiempo por la partícula (por estar cerca) es

$$\frac{2 \mu e^2 \gamma v}{3 a}$$

Todo debe pasar como si el electrón estuviera frenado por una fuerza resistente, absorbiendo un trabajo

$$-f v dt = \frac{2 \mu e^2 \gamma v}{3 a} dt$$

de donde

$$\vec{f} = - \frac{2 \mu e^2}{3 a} \vec{\gamma}$$

La fuerza  $f$  aparece como teniendo el carácter de una fuerza de inercia, y se encuentra así el valor de la masa electromagnética del electrón calculado ya anteriormente.

37. *Aplicación al caso del dipolo.*—Para poder luego estudiar el problema general de la radiación de una antena vamos ahora a tratar, como aplicación de los fenómenos del electrón acelerado, el caso más sencillo de radiación, el de un elemento de corriente infinitamente corto.

Los resultados que encontremos para este caso particular nos proporcionarán para más adelante datos importantes para la solución del problema general, puesto que siempre podemos considerar un circuito radiante cualquiera como constituido por la unión de una infinidad de corrientes infinitamente cortas.

Este elemento se llama *dipolo eléctrico*.

Si fuerzas electromotrices interiores mantienen en el dipolo os-

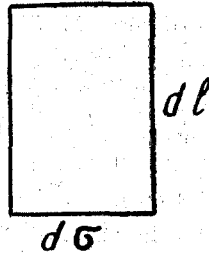
cilaciones eléctricas sinusoidales, este dipolo emite, a su vez, ondas entretenidas.

En ausencia de estas f. e. m. interiores, el dipolo radiará solamente ondas amortiguadas.

Vamos a suponer el primer caso, que el dipolo esté recorrido por corrientes alternativas sinusoidales. Puesto que la intensidad de la corriente es proporcional a la velocidad de los electrones, la hipótesis que se hace equivale a decir que la velocidad de los electrones estará representada por la fórmula

$$v = v_0 \operatorname{sen} \omega t \quad [34] \qquad \gamma = \frac{dv}{dt} = v_0 \omega \cos \omega t \quad [35]$$

Por otra parte, este caso es el mismo que el del electrón acelerado, suponiendo que en lugar de uno hay varios. Si llamamos  $N$  al número de electrones contenidos en la unidad de volumen del con-



ductor, y  $dl$  la longitud del dipolo y  $d\sigma$  su sección supuesta constante, el número de electrones del dipolo será  $N d\sigma dl$ , así que por este número tendremos que multiplicar todas las fórmulas anteriores.

#### Campos eléctricos y magnéticos producidos por el dipolo.

Apliquemos las fórmulas [26] y [27]

$$\begin{aligned} \vec{h} &= - \frac{c^2 e N d\sigma dl}{K r^2} + \frac{\mu e N d\sigma dl \gamma \operatorname{sen} \varphi}{r} = - \\ &= - \frac{c^2 e N d\sigma dl}{K r^2} + \frac{\mu e N d\sigma dl v_0 \omega \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi}{r} = - \\ &= - \frac{c^2 e N d\sigma dl}{K r^2} - \frac{\mu I_0 \omega \cos \omega t dl \operatorname{sen} \varphi}{r} \end{aligned} \quad [36]$$

pues  $e N v_0 d \sigma \cos \omega t = - I_0 \cos \omega t$

$$\vec{H} = - \frac{e v \operatorname{sen} \varphi}{r^2} - \frac{e \gamma \operatorname{sen} \varphi}{c_1 r} = - \frac{e N d \sigma d l v_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi}{r^2} - \frac{e N d \sigma d l v_0 \omega \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi}{c_1 r} = \frac{l_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varphi d l}{r^2} + \frac{l_0 \omega \cos \omega t \operatorname{sen} \varphi d l}{c_1 r} \quad [37]$$

Si examinamos las fórmulas [36] y [37] vemos que el campo eléctrico tiene dos componentes, una la fuerza de Coulomb en el sentido del radio vector y dirigida hacia la carga, que es inversamente proporcional a la distancia y que, por consiguiente, desaparece rápidamente, y otra perpendicular al radio vector, de forma sinusoidal, proporcional a la frecuencia y a la longitud del dipolo e inversamente proporcional a la distancia (\*). El campo magnético tiene, igualmente, dos componentes; las dos, según vimos, perpendiculares al radio vector y al plano del dipolo y el radio vector, y dirigidas en el sentido de las rotaciones negativas; la primera inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, desapareciendo, por consiguiente, rápidamente, y la segunda inversamente proporcional sólo a la distancia, que es la que se conserva. Esta última también proporcional a la frecuencia y a la longitud del dipolo.

Se ve que las componentes que se conservan del campo eléctrico y magnético y el radio vector forman en este orden un triedro orientado negativamente y que las dos son inversamente proporcionales a la distancia y directamente proporcionales a la frecuencia y a la longitud del dipolo (\*\*). De esto se deduce la necesidad de elevadas frecuencias y antenas altas para conseguir grandes alcances en radiotelegrafía; también se ve que la radiación de la energía útil es por ondas transversales a la dirección de propagación. Estas dos componentes son las que se llamaban antes onda de aceleración, pues les producía el valor de  $\gamma$ .

(\*) Esta última es la que únicamente se conserva a distancia.

(\*\*) También se ve que los campos eléctricos y magnéticos a gran distancia están relacionados  $C \sqrt{\mu} \vec{H} = \sqrt{K} \vec{h}$

Se ve también que los dos campos eléctrico y magnético están en fase, pues en los dos interviene la misma línea trigonométrica  $\cos. \omega t$ . A pequeña distancia del dipolo, como la componente de  $\vec{H}$  que interviene es la primera y en ella figura  $\sin. \omega t$ , los campos eléctrico y magnético están en cuadratura.

#### Densidad de energía localizada en el dieléctrico.

Aplíquense las fórmulas [12] y [13] y tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= \frac{dW_e}{d\tau} + \frac{dW_m}{d\tau} = \frac{K}{8\pi c^2} h^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2 = \\ &= \frac{K}{8\pi c^2} \frac{\mu^2 I_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t d l^2 \sin^2 \varphi}{r^2} + \frac{\mu}{8\pi} \frac{I_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sin^2 \varphi d l^2}{r^2} \frac{K\mu}{c^2} = \\ &= \frac{K \mu^2 I_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t d l^2 \sin^2 \varphi}{4\pi c^2 r^2} \quad [37'] \end{aligned}$$

se ve, pues, que las energías eléctricas y magnéticas son iguales.

*Energía transportada.*—Aplicemos el teorema de Poynting a la superficie de la onda, la cual es una esfera centrada con el dipolo.

La componente normal de  $\vec{P}$  no depende más que de las componentes de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  tangentes a la superficie de la onda (párrafo 35), y es igual a

$$P_n = \frac{\mu e^2 N^2 d \sigma^2 d l^2 v_0 \omega \cos \omega t \sin \varphi}{4\pi r^2} \left( \frac{v_0 \sin \omega t \sin \varphi}{r} + \frac{v_0 \omega \cos \omega t \sin \varphi}{c_1} \right)$$

y el flujo de  $\vec{P}$  a través de la superficie considerada (fórmula del párrafo 33).

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{2\mu e^2 N^2 d \sigma^2 d l^2 v_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t}{3 c_1} + \\ + \frac{2\mu e^2 N^2 d \sigma^2 d l^2 v_0^2 \cos \omega t \sin \omega t}{3 r} &= \frac{2\mu \omega^2 I_0^2 \cos^2 \omega t d l^2}{3 c_1} + \\ &+ \frac{2\mu I_0^2 \cos \omega t \sin \omega t}{3 r} \quad [38] \end{aligned}$$

El primer término, correspondiente al producto de las dos com-



ponentes que se conservan a gran distancia, representa la energía transportada por ésta, energía constante puesto que su expresión es independiente de la distancia.

El segundo término, que decrece con la distancia, representa la energía que en la proximidad del dipolo cede en ciertos momentos el dipolo al espacio, y en otros, el espacio al dipolo (\*) al formarse y deshacerse las ondas, que después, al separarse del dipolo, se propagan con la energía indicada por el primer término; la relación de

valores del primero al segundo término es  $\frac{r}{c_1} \frac{\gamma}{v}$ , lo cual indica que  $r$  tiene que tener un cierto valor para prescindir del segundo término, vamos a calcular ese valor; para ello, como, aparte del desfase, la relación  $\frac{\gamma}{v}$  es igual a  $\omega$ , sustituyendo este valor y teniendo

en cuenta que  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\frac{r}{c_1} \cdot \frac{\gamma}{v} = \frac{r\omega}{c_1} = \frac{r 2\pi}{c_1 T} = \frac{r 2\pi}{\lambda} \sim \frac{6r}{\lambda}$$

esto indica que  $r$  tiene que ser mucho mayor que  $\frac{1}{6} \lambda$  para que podamos prescindir del segundo término.

Para formarse una idea de la manera cómo se engendran los campos, vamos a indicarla gráficamente.

Lejos del dipolo, a distancias de varias longitudes de onda, las líneas del campo son sensiblemente circulares, como indica la figura 20, en la que se ve que, además, la densidad de líneas va disminuyendo hacia la vertical, puesto que el valor de los campos depende del seno de la colatitud y, al disminuir ésta, disminuyen los campos. Cerca del dipolo la distribución del campo electromagnético es más complicado. Las figuras 21 a 24 indican la deformación progresiva de las líneas de fuerza durante la duración de un medio período.

La figura 21 corresponde a la época *cero*. En el momento en que no hay corriente, las líneas de fuerza son entonces óvalos cerrados sobre sí mismos. Un instante más tarde, estos óvalos son rechazados por nuevas líneas de fuerza que se forman alrededor del dipolo,

(\*) Hay que observar que el producto  $\sin \omega t \cos \omega t$  será algunas veces positivo y otras negativo.

en donde la corriente empieza a establecerse; la figura 22 muestra la forma de estas curvas en la época  $\frac{T}{8}$ . Las cargas aumentan to-

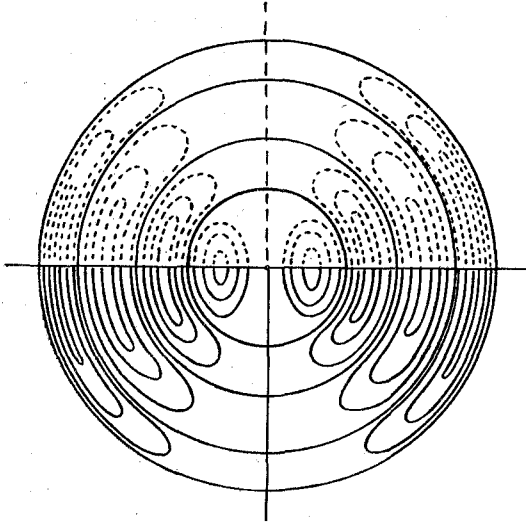


Fig. 20

avía hasta la época  $\frac{T}{4}$  (fig. 22); después, ellas disminuyen y se ven entonces las líneas de fuerza destacarse progresivamente del dipolo

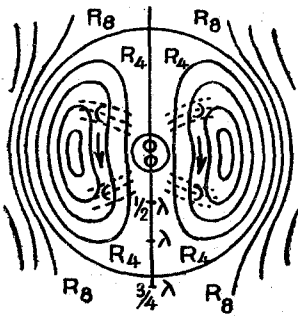


Fig. 21

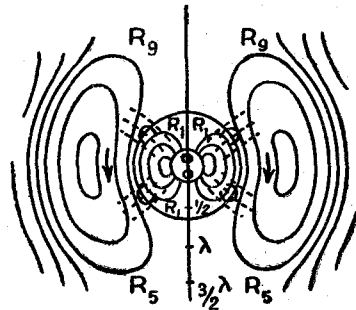


Fig. 22

para formar nuevas curvas cerradas sobre sí mismas, como lo indica la figura 24, correspondiente a la época  $\frac{3T}{8}$ .

Se vuelven a encontrar en seguida en la época  $\frac{T}{2}$  curvas idénticas a las de la época  $t = 0$  (fig. 21) con sólo un cambio de signo, y los fenómenos se repiten periódicamente.

38. *Diversas propiedades de las ondas.*—A gran distancia del origen la superficie de la onda electromagnética se confunde prácticamente con su plano tangente en una gran zona. Por esta razón

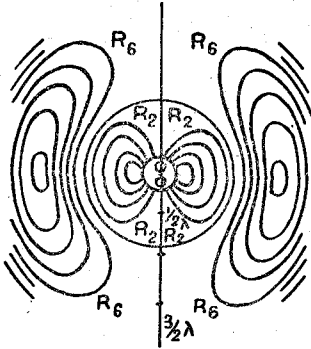


Fig. 23

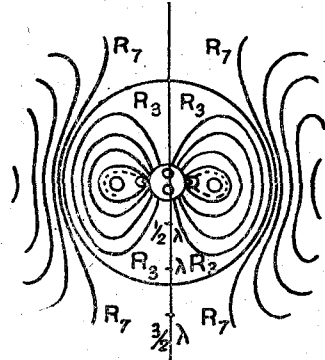


Fig. 24

se las llama ondas planas. Como hemos visto, dentro de este plano están los dos vectores eléctrico y magnético perpendiculares entre sí, y ambos a la dirección de la propagación.

La velocidad común de los dos vectores es  $c_1 = \frac{c}{\sqrt{K\mu}}$

Cuando se pasa de un medio a otro de distintas constantes se demuestra que hay reflexión y refracción de las ondas, análogamente a lo que le pasa a la onda luminosa, y las leyes a que obedecen dichos fenómenos son también idénticos a las ópticas, es decir, ángulo de incidencia, igual al de reflexión, y relación de los senos de los ángulos de incidencia y refracción, igual a la relación inversa de las raíces cuadradas de los poderes inductores específicos. Debido a esto último, cuando el poder inductor específico del segundo medio se hace infinitamente grande (es decir, el cuerpo tiene una conductibilidad eléctrica infinita), la relación de los senos se hace infinita, o sea, el ángulo de refracción cero, lo cual indica que cuando la superficie es de una conductibilidad muy grande, las ondas no se refractan, sino que se reflejan en su totalidad.

Podremos conseguir un sistema de ondas estacionario, o sea, el

fenómeno de interferencias, cuando un tren de ondas se hace reflejar (fig. 25) sobre una superficie metálica,  $M$ , perpendicular a la dirección de propagación y de conductibilidad infinita.

Como no hay refracción ni, como veremos más adelante, corrien-

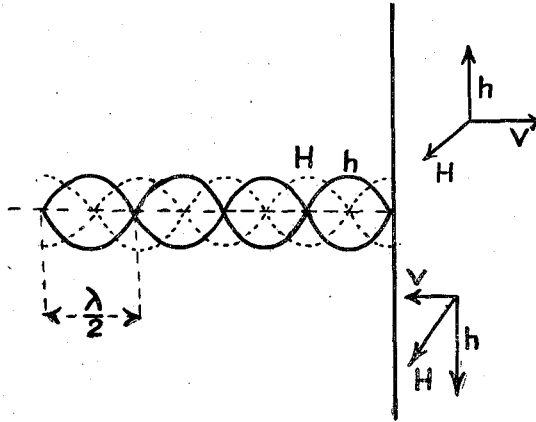


Fig. 25

te superficial en el punto  $R$ , el vector eléctrico debe ser cero, con lo cual la onda reflejada debe estar defasada,  $\pi$ , respecto de la incidente, para así, entre las dos, anularse. Se ve que a distancias  $\frac{\lambda}{2}$  del punto  $R$  se encuentran *nodos* de vibración, y, en cambio, a  $\frac{\lambda}{4}$ , vientres. Es el fenómeno llamado de las ondas estacionarias. Igual le ocurre a la onda magnética; pero si la experiencia se hace en la proximidad del generador, como el vector magnético está en cuadratura respecto al eléctrico, resultará, en el punto de incidencia, un vientre de magnetismo.

39. *Experiencias de Hertz.*—Las conclusiones precedentes deducidas de la teoría de Maxwell han sido prácticamente confirmadas por Hertz en toda su plenitud.

*Generador de ondas.* — Para obtener una perturbación electromagnética de corto período, Hertz ha utilizado la descarga oscilante de un condensador. Se sabe que en el caso en que la resistencia del circuito de descarga es pequeña, el período de las oscilaciones está dado por la fórmula de Thomson

$$T = 2\pi \sqrt{LC}$$

siendo  $C$  la capacidad del condensador expresado en faradios y  $L$  la autoinducción en henrios. Reduciendo  $C$  y  $L$  al mínimo posible (capacidad y autoinducción propias de los conductores) se obtienen fácilmente períodos propios del orden de  $10^{-8}$  de segundo ( $\lambda = 3$  m.).

El tipo más sencillo de *oscilador* de Hertz estaba constituido por dos varillas metálicas en prolongación una de otra, dejando entre ellas un pequeño intervalo; las extremidades estaban terminadas por pequeñas bolas. Cada varilla estaba unida por un conductor resistente a uno de los polos de un manantial de alta tensión (por ejemplo, bobina de Ruhmkorf). Cuando la diferencia de potencial de las dos mitades del oscilador sobrepasa al potencial explosivo correspondiente a la anchura del corte, una chispa salta entre los bordes de éste y las oscilaciones se producen. Examinando la chispa al espejo giratorio, se observa que se compone, en realidad, de unas pocas descargas, sucediéndose con un intervalo de un semiperíodo y con una intensidad decreciente.

El oscilador emite, pues, trenes de ondas amortiguadas separadas por grandes intervalos de reposo (del orden de 100.000 veces la duración de emisión). La resistencia de los conductores de conexión hace despreciable la influencia del manantial de alta tensión en la descarga.

Las cargas eléctricas sufren una aceleración dirigida según el eje del oscilador; se ve, como hemos dicho en párrafos anteriores, que la *onda emitida* (prácticamente reducible a la onda de aceleración) está *polarizada linealmente*; la fuerza eléctrica está contenida en el plano radial pasando por el eje del oscilador, y la fuerza magnética es perpendicular a este plano.

*Detector de ondas.*—Hertz ha registrado la fuerza eléctrica y la fuerza magnética por medio de un circuito oscilante de forma sencilla, al cual ha dado el nombre de *resonador*. Se compone de una espira de hilo de cobre, presentando un corte cuya anchura puede regularse por medio de un tornillo micrométrico. El aparato es sensible, a la vez, a los efectos de las cargas eléctricas y magnéticas, pero es fácil separar éstas.

Las variaciones del campo eléctrico crean en el resonador corrientes de conducción dirigidas en el sentido de la fuerza. Por otra parte, las variaciones del flujo magnético abrazado por el circuito producen una f. e. m. que tiende igualmente a crear corrientes en el resonador.

Cuando el plano del resonador es normal a la dirección de pro-

pagación de las ondas (fig. 26), el flujo magnético a través del resonador es nulo y la fuerza eléctrica es la única que ejerce la acción. Llamemos eje del resonador al diámetro que pasa por el corte. Si el eje coincide con la dirección de la fuerza eléctrica, el efecto observado será nulo por razón de simetría. Por el contrario, si es or-

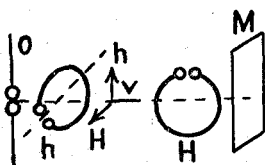


Fig. 26

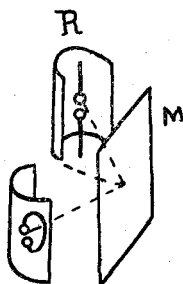


Fig. 27

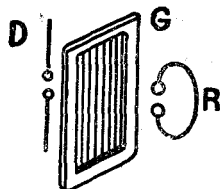


Fig. 28

togonal a esta dirección, el corte se encontrará en el punto de intensidad máxima y aparecerán chispas tanto más brillantes cuanto que el campo eléctrico sea más intenso.

Haciendo pasar por el oscilador el plano del resonador y orientando su eje paralelamente a la fuerza eléctrica, se observa el efecto de la fuerza magnética. Naturalmente, la sensibilidad del detector será tanto más grande cuanto que su período propio sea más próximo del período del oscilador.

*Producción de ondas estacionarias.*—Basta colocar el oscilador O (fig. 26) delante de una gran superficie reflejante, M, constituida, por ejemplo, por un muro revestido de hojas de cinc. La distancia entre el oscilador y el muro será de algunas longitudes de onda. Se pone fácilmente en evidencia por medio del resonador el doble sistema de ondas estacionarias, de las cuales se puede medir su longitud de onda. Como lo indica la teoría, se encuentra un nodo de fuerza eléctrica y un vientre de fuerza magnética en el muro.

*Reflexión.* — Colocando el oscilador en el foco de un reflector metálico en forma de cilindro parabólico (fig. 27) se produce un haz de ondas sensiblemente paralelas que pueden ser apreciadas a una distancia más grande que en la experiencia anterior, sobre todo si se coloca el resonador en el foco de un espejo de la misma forma. Hertz ha estudiado así la reflexión oblicua en las ondas y ha verificado la validez de la ley de Descartes  $i = i'$ .

*Refracción.*—Un prisma de brea de 30 grados de ángulo y 1,50

metros de arista ha permitido al mismo experimentador refractar el haz y verificar aproximadamente la ley de los senos.

*Polarización.*—Si se hace que sean ortogonales las líneas focales de los dos espejos empleados en las experiencias de reflexión, se observa que ninguna chispa salta en el resonador. Esta experiencia demuestra que la fuerza eléctrica producida en el plano ecuatorial del oscilador es paralela a éste. Se puede todavía demostrar esta propiedad interponiendo entre el oscilador y el resonador la rejilla de Hertz (fig. 28). Esta está constituida por un cuadro de madera de gran dimensión, en el cual están tendidos hilos de cobre paralelos. Cuando los hilos de la rejilla son paralelos al oscilador están dirigidos según la fuerza eléctrica, lo cual provoca en ellos corrientes intensas, la energía de las ondas es entonces reflejada hacia el oscilador o transformada en calor por efecto Joule, y ninguna fracción apreciable llega al receptor. Si se hace girar la rejilla 90°, la causa de absorción desaparece por ser los hilos de la rejilla perpendiculares a la fuerza eléctrica, y al resonador llega energía.

## CAPITULO V

### Penetración de las ondas en el interior de los cuerpos.

40. *Caso de un cuerpo infinitamente conductor.*—Si tomamos las ecuaciones de Maxwell [1'] y [2']

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \vec{h} + \frac{\delta}{\delta t} \frac{K}{c^2} \vec{h} \quad [1']$$

$$-\text{rot } \vec{h} = \frac{\delta}{\delta t} \mu \vec{H} \quad [2']$$

y se hace crecer  $\delta$  indefinidamente teniendo en cuenta que:

- 1.º Ninguno de los elementos del campo debe hacerse infinito.
- 2.º Que la cantidad de calor debida al efecto Joule decrece cuando la conductibilidad aumenta.

Se obtienen los resultados siguientes:

- 1.º *En todos los puntos situados en el interior de un cuerpo infinitamente conductor, el campo eléctrico es nulo en todo momento.* En efecto, el segundo miembro de la ecuación [1'], debiendo permanecer finito y  $\sigma$ , aumentando indefinidamente  $\vec{h}$  tiende hacia cero.

- 2.º *En el interior de un cuerpo infinitamente conductor el cam-*

po magnético es invariable. Es, pues, constantemente nulo si era nulo en la época inicial.

En efecto,  $\vec{h}$  siendo nulo, su rotacional lo será también, y de la ecuación [2'] deduciremos que  $\vec{H}$  es invariable con el tiempo.

Este resultado está de acuerdo con la experiencia en el caso de cuerpos *supraconductores*, los cuales se aproximan a la conductibilidad infinita. (Se sabe que se llaman así los cuerpos metálicos enfriados a temperaturas muy bajas tan próximas como sean posible del cero absoluto ( $-273^\circ$ ), su resistencia es entonces muy débil. Se observa, en efecto, que una corriente no desprende allí calor de Joule y que, lanzando allí una corriente, no se observa ninguna diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera. La supraconductibilidad es destruída por campos magnéticos intensos.) Por ejemplo, bismuto en helio líquido es un cuerpo supraconductor.

Supongámosle inicialmente en un campo magnético no muy fuerte (para no destruir la supraconductibilidad). Suprimamos la acción del campo  $\vec{H}$ ; se observa que el campo interior subsiste; el bismuto es asimilable a un imán y queda imantado en tanto que esté frío.

Sin embargo, este campo desaparece según una ley exponencial  $e^{-\frac{R}{L}t}$ , pero como  $R$  es muy pequeño, la constante de tiempo  $\frac{L}{R}$  es muy grande y el campo persistirá durante varias horas.

No se puede, pues, según lo que precede modificar el campo magnético en el bismuto frío y, de una manera general, las variaciones del campo magnético no influyen en un cuerpo infinitamente conductor. Si primitivamente el campo es nulo, permanece constantemente nulo; no es otra cosa que el fenómeno de la pantalla magnética.

3.º *Las corrientes en la masa son independientes del tiempo. Permanecen constantemente nulas si eran nulas inicialmente. Las corrientes variables están localizadas en la superficie.*

En efecto, el término  $K \frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$  de la [1'] siendo nulo y siendo rot.  $\vec{H}$  independiente del tiempo; el término  $4 \pi \sigma \vec{h}$  debe permanecer invariable con el tiempo, y como  $\sigma \vec{h}$  expresa la densidad de corriente, queda demostrado lo que se proponía. Si, pues, no había corriente en el origen de los tiempos, la corriente será nula en el



interior del conductor. Si partiendo de un conductor ordinario se hace crecer  $\delta$  indefinidamente, la corriente variable en la *masa* del conductor tiende hacia cero, la corriente se hace cada vez más superficial; la corriente está localizada en una capa periférica tanto más delgada cuanto más conductor sea el cuerpo. (Infinitamente delgada en un cuerpo infinitamente conductor.) Es lógico que esto ocurra, pues las corrientes variables parten de un valor nulo que subsistirá.

Puede explicarse físicamente el fenómeno, según el cual se localizan superficialmente las corrientes variables. En efecto, si representamos la sección recta del conductor por el círculo de la figura 29 se ve que siendo las líneas de puntos las de fuerza del campo magnético, estas líneas serán en mayor número a medida que aumente

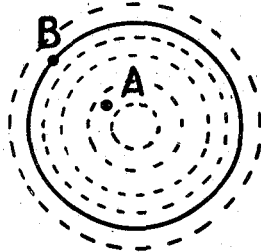


Fig. 29

la intensidad del campo y en menor número cuando disminuya. Estas líneas, al aumentar y disminuir su número; cortan los elementos del conductor, desarrollando corrientes que se oponen a la variación de la principal, pero estas corrientes serán más o menos intensas, según que al elemento considerado le corten más o menos líneas, y como al punto *B* le cortan menos líneas que al *A*, las corrientes antagonistas serán mayores en *A* que en *B*, es decir, la corriente tiende a la periferia.

Se dice que la corriente está en la superficie cuando la profundidad de esta capa es despreciable ante las dimensiones del aparato. En caso contrario, se dice que hay penetración, como, por ejemplo, le ocurre a las ondas radioeléctricas en la superficie del mar. Las ondas penetran en el interior del mar.

4.º *La componente tangencial del campo eléctrico es infinitamente pequeña, incluso en la capa infinitamente delgada por la que circulan las corrientes.*

En efecto, cuando la conductibilidad aumenta indefinidamente, a pesar de que la repartición de la corriente sea superficial y que la corriente no pasa más que por una delgada capa cada vez más resistente, la cantidad de calor desprendida por la corriente no aumenta indefinidamente. De ello resulta que la componente tangencial del campo eléctrico debe tender hacia cero, no necesitándose, por otra parte, la anulación de la componente normal por no producir esta componente corriente alguna superficial.

$$Q = \frac{E^2}{R} = E^2 \sigma = \vec{h}_x \sigma$$

5.º *En la proximidad de un cuerpo infinitamente conductor, el campo eléctrico exterior es normal a la superficie del conductor.*

En efecto, la componente tangencial del campo, siendo continua cuando se atraviesa la superficie, es nula en el exterior y no subsiste más que la componente normal.

Se demuestra también fácilmente que:

6.º *El campo magnético exterior, en la proximidad de la superficie, es tangente a la misma (abstracción hecha de un campo magnético permanente que pudiera existir).*

En efecto, suponiendo que el eje de las  $Z$  sea normal a la superficie, por ser el vector  $\vec{h}$  paralelo a dicho eje, la coordenada  $Z$  de rot.  $\vec{h}$ , que es  $\frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y}$ , será cero, e igual le ocurrirá a la coordenada de  $\mu \frac{\delta H}{\delta t}$ , que le es igual según [2'], lo cual indica que la componente de  $\vec{H}$ , según el eje de las  $Z$ , es constante con el tiempo, o sea, que si existía antes un campo, seguirá el mismo, y que si no había campo, la componente de  $\vec{H}$ , según el eje de la  $Z$ , es nula, o sea, que  $\vec{H}$  es tangencial a la superficie del conductor, como queríamos demostrar.

7.º *La corriente superficial es perpendicular al campo magnético exterior.*

En efecto, sabemos que el segundo término de la ecuación [1'] representa las corrientes de desplazamiento que en este caso de cuerpo infinitamente conductor, serán cero, y la ecuación quedará reducida a rot.  $\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \vec{h}$ , la cual puede ponerse en coordenadas

rectangulares, tomando por eje de las  $Z$  el perpendicular a la superficie del conductor.

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ = \frac{4 \pi \sigma}{c^2} (h_x \vec{i} + h_y \vec{j} + h_z \vec{k}) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que  $H_z = 0$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4 \pi \sigma h_x}{c^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{4 \pi \sigma h_y}{c^2}$$

e integrando en la capa superficial donde hay corriente

$$-H_y = 4 \pi J_x \quad \text{,,} \quad H_x = 4 \pi J_y$$

llamando  $J_x$  y  $J_y$  las componentes de la densidad de corriente por centímetro de anchura, según los ejes de las  $X$  e  $Y$ . Estas dos últimas expresiones nos indican que el vector  $\vec{H}$  de componentes  $H_x$  y  $H_y$ , es perpendicular e igual al vector  $4 \pi \vec{J}$  de componentes  $4 \pi J_x$  y  $4 \pi J_y$ , o sea, numéricamente

$$\text{mod } \vec{H} = 4 \pi (\text{mod } \vec{J}) \quad [39]$$

41. *Caso de conductores metálicos en alta frecuencia rodeados de un aislante.*

El caso de la conductibilidad infinita es casi imposible de realizar en la práctica, pero cuando las ondas electromagnéticas son de alta frecuencia, los cuerpos conductores, tales como los metales, se comportan como los infinitamente conductores, según vamos a demostrar. Determinemos también cuál es la frecuencia a partir de la cual los cuerpos conductores reales gozan de las propiedades de los infinitamente conductores.

Consideremos un campo eléctrico sinusoidal

$$\vec{h} = \vec{h}_0 \text{ sen } \omega t$$

de período  $T$ , de pulsación  $\omega = \frac{2 \pi}{T}$ , de frecuencia  $f = \frac{1}{T}$ .

El campo magnético será también sinusoidal y de la forma

$$\vec{H} = H_0 \text{ sen } (\omega t + \varphi)$$

En la fórmula [2'] de Maxwell resultará que:  $\text{mod} \left( \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} \right) =$   
 $= \text{mod} \vec{H}_0 \omega \cos (\omega t + \varphi)$ , con lo cual, al aumentar  $\omega$ ,  $\mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t}$  tiende  
hacia el infinito; pero como el otro miembro de la ecuación permanece finito, es preciso para ello que  $\vec{H}_0$  tienda hacia cero, es decir, el campo magnético en el interior del cuerpo se anula al crecer indefinidamente  $\omega$ .

En la ecuación [1'], también y por la misma razón tiende hacia infinito  $\frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$  al crecer  $\omega$ ; pero como  $\text{rot } \vec{H}$  permanece finito, es preciso también que  $\vec{h}_0$  tienda hacia cero, o sea, que al crecer la frecuencia el campo eléctrico en el interior del cuerpo se anula. Estos dos resultados son los que obtuvimos en los cuerpos supraconductores, y de los cuales se deducían todos los otros; así es que aunque los cuerpos no sean supraconductores los podemos aplicar todas sus propiedades, siempre que la frecuencia crezca indefinidamente. Por tanto, diremos:

1.º *En el interior de los cuerpos no existe ningún campo eléctrico ni magnético, ninguna corriente, pues éstas son sólo superficiales.*

2.º *En el dieléctrico exterior, el campo eléctrico es normal a la superficie del conductor.*

3.º *El campo magnético exterior, tangente a la superficie del conductor, es normal a la dirección de la corriente superficial, y está unido a ésta por la relación  $H = 4 \pi J$ .*

*Observación.*—Lo único que diferencia este caso del de los conductores perfectos es que la capa por donde circulan las corrientes superficiales no es infinitamente delgada, sino tanto más pequeña cuanto que la frecuencia sea mayor. Por consiguiente, la asimilación de los conductores reales a conductores perfectos no debe ser tomada más que como una primera aproximación. Las corrientes de alta frecuencia son, desde luego, rechazadas hacia la superficie del con-

ductor, pero ellas ocupan allí un espesor no despreciable, del orden del milímetro para el cobre. Es indispensable, casi siempre, tener en cuenta esta penetración en el metal.

La penetración resulta importante cuando se trata, no de un conductor metálico, sino de cuerpos de resistividad relativamente elevada, como lo son las capas líquidas y los terrenos, a lo largo de los cuales se propagan las oscilaciones radioeléctricas.

42. *Corrientes de desplazamiento y conducción.*—Consideremos un condensador plano de superficie  $s$ , con un dieléctrico supuesto perfecto ( $\sigma = 0$ ) de espesor  $e$ . Su capacidad tiene por expresión  $c = \frac{K s}{4 \pi e}$ , en la cual,  $K$  es el poder inductor específico.

Supongamos que esté sometido a una diferencia de potencial sinusoidal:

$$v = v_0 \text{ sen } \omega t$$

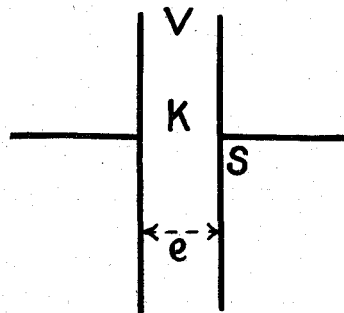


Fig. 29 bis.

La intensidad máxima correspondiente de la corriente de *desplazamiento* es:

$$i_0 = \omega c v_0 \qquad i_0 = \omega \frac{K s}{4 \pi e} v_0$$

Si entre las armaduras del condensador se desliza un cuerpo conductor de conductibilidad  $\sigma$  sin efecto dieléctrico, la intensidad de la corriente de *conducción* es:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V}{\frac{e}{\sigma s}} = \frac{\sigma s}{e} v = \frac{\sigma s}{e} v_0 \text{ sen } \omega t$$

La amplitud máxima de esta corriente es:  $I_0 = \frac{\sigma s}{e} v_0$ .

La relación de las intensidades máximas de las corrientes de capacidad y conducción es, pues:

$$\frac{i_0}{I_0} = \frac{K \omega}{4 \pi \sigma}$$

Si el medio interpuesto entre las armaduras no es ni perfectamente dieléctrico, ni conductor sin efecto dieléctrico, habrá corrientes de desplazamiento y de conducción.

Estas corrientes serán iguales si  $K \omega = 4 \pi \sigma$ , o bien si  $\frac{1}{\omega} = \frac{K}{4 \pi \sigma}$ . Pero  $\frac{1}{\omega} = \frac{T}{2 \pi}$  es homogéneo a un tiempo. Así, pues, la ecuación de igualdad puede expresarse por  $\frac{1}{\omega} = \frac{T}{2 \pi} = \frac{K}{4 \pi \sigma} = \tau$ , tiempo característico, o por  $\omega = \frac{4 \pi \sigma}{K}$ , pulsación crítica.

Si  $\frac{K \omega}{4 \pi \sigma} > 1$ , la corriente de desplazamiento predomina.

Si  $\frac{K \omega}{4 \pi \sigma} < 1$ , es la corriente de conducción.

La corriente de conducción es la única que puede existir con las bajas frecuencias.

Admitida la existencia de las dos clases de corriente eléctrica, resulta que un cuerpo cualquiera podrá considerarse como conductor o como aislador, según sea el valor de la frecuencia.

*Observación.*—Para los conductores metálicos no ha sido posible todavía poner en evidencia los efectos de acción dieléctrica interna, aun para las frecuencias más elevadas.

En cambio, en los cuerpos que se exponen a continuación veremos cómo intervienen las corrientes de conducción y desplazamiento

**Agua de mar encerrando 30 kgs. de sal marina por metro cúbico.**

La resistividad de este agua es de 25 a 30  $\omega$ /cm.<sup>3</sup> Tenemos:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{30 \omega} = \frac{1}{30 \times 10^9} = \frac{1}{3 \times 10^{10}} \text{ U. E. M.}$$

$$K = 80 K_0 = \frac{80}{(3 \times 10^{10})^2} \dots \text{ U. E. M.}$$

$$K_0 = 1 \text{ en unidades e. l. s.; en unidades e. l. m.} = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{(3 \times 10^{10})^2}$$

siendo  $K_0$  el poder inductor específico del aire.

La pulsación crítica para la cual las intensidades de las dos corrientes son las mismas es, en este caso,  $\omega = \frac{4\pi\sigma}{K}$ , que corresponde a una longitud de onda de

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{vK}{2\sigma} = \frac{(3 \times 10^{10}) \times 80 \times 3 \times 10^{10}}{2 \times (3 \times 10^{10})^2} = 40 \text{ cm.}$$

Para las longitudes de onda más grandes de 40 cm., el agua del mar funcionará como un conductor de gran resistividad. Este será el caso de la práctica, donde las más pequeñas longitudes de onda son de varios metros.

#### Terreno muy resistente (seco y guijarroso).

En esta clase de terrenos:

$$\rho = 300.000 \text{ ohmios-cm.}^3 = 300.000 \times 10^9 \text{ U. E. M.} = 3 \times 10^{14} \text{ U. E. M.}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3 \times 10^{14}} \text{ U. E. M.}$$

$$K = 4K_0 = \frac{4}{9 \times 10^{20}} \text{ U. E. M.}$$

La pulsación crítica corresponde a la longitud de onda:

$$\lambda_0 = \frac{vK}{2\sigma} = \frac{3 \times 10^{10} \times \frac{4}{9 \times 10^{20}}}{2 \times \frac{1}{3 \times 10^{12}}} = 20.000 \text{ cm.} = 200 \text{ metros.}$$

Así, pues, un terreno muy resistente puede considerarse como conductor cuando las longitudes de onda son grandes con relación a 200 metros, y como dieléctrico cuando son pequeñas con relación a dicha longitud.

Sólo en el caso de propagación de ondas cortas sobre un suelo muy resistente habrá corrientes de desplazamiento.

43. *Expresión de la penetración de las ondas en los cuerpos conductores.*—Se ha visto que las corrientes de alta frecuencia circulan en los cuerpos conductores por una capa superficial de espesor variable, dependiente de las constantes características del cuerpo y de la frecuencia. Para calcular el valor de dicho espesor cuando el cuerpo es francamente conductor, o sea, cuando las corrientes de conducción son preponderantes, se emplearán las ecuaciones de Maxwell, haciendo en ellas cero el término correspondiente a las corrientes de desplazamiento

$$\frac{K}{c^2} \frac{\delta \vec{h}}{\delta t}$$

Este problema es difícil de resolver cuando se le considera en toda su generalidad. Emplearemos un método aproximado, considerando un caso sencillo aquel en que las ondas electromagnéticas se propagan a lo largo de una superficie conductora plana e indefinida.

Supongamos el caso sencillo de un conductor separado del aire por el plano horizontal de las  $xy$ , en el cual las corrientes se suponen paralelas al plano  $z = 0$ , e independientes de la variable  $y$ .

1.º *En el exterior* del cuerpo, el vector fuerza eléctrica  $\vec{h}_e$  es

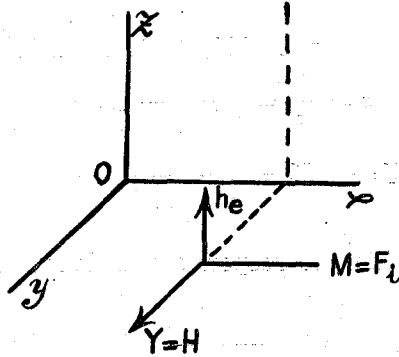


Fig. 30

perpendicular a la superficie de separación  $xy$ , y paralelo al eje  $z$ . El vector campo magnético es horizontal.

2.º *En el interior* de la masa del cuerpo, el campo eléctrico  $\vec{h}$  está dirigido según  $ox$  y sus componentes.

$$h_x = h \quad h_y = 0 \quad h_z = 0$$



El campo magnético  $H$  está orientado según  $Oy$ .

$$H_x = 0 \qquad H_y = H \qquad H_z = 0$$

Las intensidades de estos dos campos varían en función de  $z$ .

Si ahora desdoblamos cada una de las ecuaciones vectoriales de Maxwell, en las tres correspondientes a las coordenadas sobre los ejes, tendremos los dos grupos

$$\left. \begin{aligned} -\mu \frac{\delta H_x}{\delta t} &= \frac{\delta h_z}{\delta y} - \frac{\delta h_y}{\delta z} \\ -\mu \frac{\delta H_y}{\delta t} &= \frac{\delta h_x}{\delta z} - \frac{\delta h_z}{\delta x} \\ -\mu \frac{\delta H_z}{\delta t} &= \frac{\delta h_y}{\delta x} - \frac{\delta h_x}{\delta y} \end{aligned} \right\} 40) \quad y \quad \left. \begin{aligned} \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_x &= \frac{\delta H_y}{\delta z} - \frac{\delta H_z}{\delta y} \\ \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_y &= \frac{\delta H_z}{\delta x} - \frac{\delta H_x}{\delta z} \\ \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_z &= \frac{\delta H_x}{\delta y} - \frac{\delta H_y}{\delta x} \end{aligned} \right\} [41]$$

Si en estos grupos sustituimos, en vez de  $H_x, H_y, H_z, h_x, h_y, h_z$ , los valores hallados, tendremos:

$$-\mu \frac{\delta H_y}{\delta t} = \frac{\delta h_x}{\delta z} \quad [42] \quad y \quad \frac{4\pi\sigma}{c^2} h_x = \frac{\delta H_y}{\delta z} \quad [43]$$

Las ecuaciones del campo electromagnético quedan reducidas a las dos anteriores, siendo las incógnitas  $h_x, H_y$ . La eliminación de  $H_y$  entre la [42] y [43] da:

$$-\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\delta h_x}{\delta t} = \frac{\delta^2 h_x}{\delta z^2} \quad [44]$$

Esta ecuación basta para hacernos conocer la ley de variación de la componente tangencial  $h_x$  del campo eléctrico, y, por consiguiente, la densidad de la corriente superficial  $\sigma h_x$ .

Es la ecuación de la penetración del calor en un muro o en un suelo plano. Para oscilaciones entretenidas de pulsación  $\omega$ , la ecuación [44] se satisface poniendo (\*):

(\*) Derivando, en efecto,  $h_x$  con relación a  $t$  y  $z$ , tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\delta h_x}{\delta t} &= -h_{x0} \omega e^{-\frac{z}{a}} \operatorname{sen} \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) \\ \frac{\delta h_x}{\delta z} &= \frac{1}{a} h_{x0} e^{-\frac{z}{a}} \operatorname{sen} \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) - \frac{1}{a} h_{x0} e^{-\frac{z}{a}} \cos \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) \\ \frac{\delta^2 h_x}{\delta z^2} &= -\frac{2}{a^2} h_{x0} e^{-\frac{z}{a}} \operatorname{sen} \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) \end{aligned}$$

y sustituyendo en [44] resulta una identidad.

$$h_x = h_{x_0} e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right) \quad [45]$$

con

$$a = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}} \quad [46]$$

La densidad de corriente a la profundidad  $z$  vale, pues:

$$J = \sigma h_x = \sigma h_{x_0} e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right) \quad [47]$$

$$J = J_0 e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right) \quad [48]$$

poniendo  $J_0 = \sigma_0 h_{x_0}$

La densidad de corriente es, pues, máxima en la superficie, de-

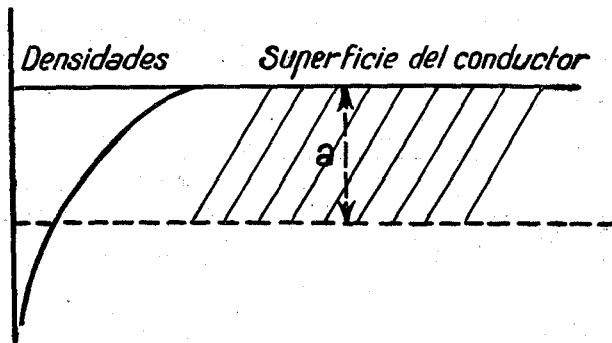


Fig. 30 bis.

crece exponencialmente en profundidad y se encuentra reducida a la fracción  $\frac{1}{e}$ , es decir, aproximadamente al tercio, a la profundidad dada por la igualdad

$$a = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}}$$

Dicha densidad es, próximamente, 1/1.000 del máximo, a una profundidad siete veces más grande:

$$J = J_0 e^{-\gamma z} \cos \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) \text{ pues } e^{-\gamma} = \frac{1}{1000}$$

Este resultado justifica el nombre de penetración que se da frecuentemente a la cantidad  $a$ , la que proporciona una idea precisa del grado de localización superficial de las corrientes.

La fórmula [48] hace ver que, al mismo tiempo que la intensidad de la corriente se atenúa con la profundidad, cambia la fase de esta intensidad, puesto que  $\cos \left( \omega t - \frac{z}{a} \right)$  varía con  $z$ . Se podría, integrando la anterior fórmula, demostrar que las variaciones de fase en profundidad producen en la corriente total un *defasage* de 1/8 de período respecto a la corriente superficial.

*Valores numéricos.* — Para los metales no magnéticos, cobre, zinc, etc...; para el agua del mar y para la mayor parte de los terrenos, la permeabilidad magnética  $\mu$  no difiere sensiblemente de la del aire.

En unidades C. G. S. — E. M. podemos, pues, hacer  $\mu = 1$ , lo que da para la penetración:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \omega}} \quad [49]$$

La penetración de las ondas de alta frecuencia es, pues, en razón inversa de la raíz cuadrada de la frecuencia.

A continuación se indican, calculados por esta fórmula, los valores de la penetración para oscilaciones de diferentes longitudes de onda: en el caso del cobre, de una resistividad de  $2 \mu \Omega \cdot \text{cm.}^2$ ; del agua del mar, de una resistividad de  $30^{10} \cdot \text{cm.}^2$ , y en el caso de un terreno de arena humedecida con agua medianamente conductora, consiguiéndose así una resistividad de  $50.000 \omega \cdot \text{cm.}^2$

Este cuadro demuestra que las ondas un poco largas que se propagan por encima del mar penetran en dicho líquido a una profundidad apreciable. Gracias a estas circunstancias es posible transmitir mensajes a submarinos sumergidos, y hasta hacer comunicar a dos submarinos entre sí, porque las ondas emitidas por el primero, después de haber atravesado un débil espesor de agua, salen del mar, se propagan a lo largo de su superficie, penetran un poco en profundidad y pueden así alcanzar al navío receptor. La recepción a bordo de submarinos no es, sin embargo, posible más que con una

inmersión de algunos metros, y empleando en la recepción amplificadores muy potentes, porque el amortiguamiento de las ondas con la profundidad es muy considerable.

En subterráneos se pueden recibir todas las longitudes de onda, así como a través de la mampostería. Por el contrario, los metales forman para las ondas verdaderas pantallas.

*Valores de la penetración de las ondas.*

$$a = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \omega}}$$

*Caso del cobre.*

$$\sigma = \frac{1}{2.10^{-6} \text{ ohms}} = \frac{1}{2000}$$

Longitudes de onda en metros	16.000	4.000	1.000	250	4
Penetración en metros	0,00052	0,00026	0,00013	0,000065	0,000008

*Caso del agua del mar.*

$$\sigma = \frac{1}{30 \text{ ohms}} = \frac{1}{310^{10}}$$

Longitudes de onda en metros	16.000	4.000	1.000	250
Penetración en metros	2	1	0,50	0,25

*Caso de un terreno medianamente conductor.*

$$\sigma = \frac{1}{50000} = \frac{1}{50.10^{13}}$$

Longitudes de onda en metros	16.000	4.000	1.000	250
Penetración en metros	80	40	20	10

44. *Consecuencias de la penetración de las ondas en el terreno.*—Consideremos un punto  $M$  de la superficie de un terreno conductor (fig. 31). El campo eléctrico en  $M$  tiene dos componentes: una vertical,  $F'$ , y otra horizontal,  $F''$ , debido, como se ha explicado, a que el terreno no es infinitamente conductor. Se acaba de ver la variabilidad de la fase de la densidad de la corriente, y, por tanto,

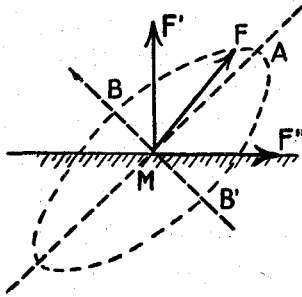


Fig. 31

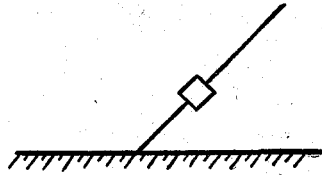


Fig. 32

de la intensidad del campo eléctrico con la profundidad.  $F'$  y  $F''$  no estarán, por consiguiente, en fase, y su resultante será un campo elíptico, cuyo eje mayor,  $A A'$ , que corresponde a la dirección del campo máximo, estará ligeramente inclinado sobre la horizontal, en el sentido de la propagación.

El vector  $F''$  es tanto menor cuanto mayor es la conductibilidad. la oblicuidad es, consiguientemente, inapreciable sobre la superficie del mar, no pasando de algunos grados en los terrenos resistentes.

La inclinación del vector del campo eléctrico se mide con una antena receptora (fig. 32) que pueda formar con el terreno ángulos diferentes. Orientando convenientemente esta antena, se buscan las posiciones que corresponden al máximo y al mínimo de la intensidad de recepción; esta última es la del eje menor  $B B'$  de la elipse (figura 31).

La inclinación del campo es el fundamento de las *antenas dirigidas*. Consideremos, en efecto, una antena acodada  $A B C$  (fig. 33) que recibe las oscilaciones de un emisor situado en su plano; y supongamos, primero, que dicho emisor se encuentra a la izquierda de la antena. El vector  $F'$  del campo eléctrico induce, en la parte vertical  $A B$ , la f. e. m.  $F' h$ , y el vector  $F''$  induce, en la rama horizontal  $B C$ , la f. e. m.  $F'' l$ . La f. e. m. total inducida en antena,

igual a  $F' h + F'' l$ , es mayor que si no hubiese componente horizontal del campo.

Si, por el contrario, las ondas viniesen de la derecha de la antena, la f. e. m. inducida total sería igual a  $F' h - F'' l$ , puesto que el vector  $F''$  estará dirigido en el sentido de la propagación.

La diferencia de las f. e. m. inducidas, según que las emisiones

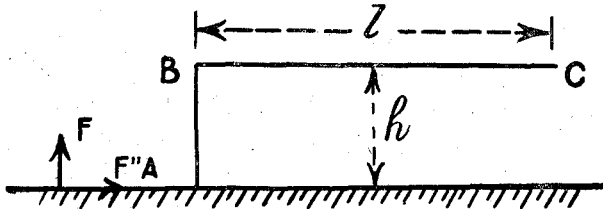


Fig. 33

vengan de uno u otro lado de la antena, es igual a  $2 F'' l$ . Sin embargo, en la práctica las diferencias en la intensidad de recepción no son considerables; varían mucho, según sea la naturaleza del terreno, y son inapreciables sobre el mar.

*Observaciones.*—1.<sup>a</sup> El efecto directivo de la antena es debido a la inclinación de las ondas, cualesquiera que sean las causas de esta inclinación. Dicho efecto aumentará, por consiguiente, si el emisor se encuentra a una altura apreciable sobre la horizontal de la base de la antena receptora. En este caso, los rayos de propagación de la energía (envolvente del vector de Poynting) están, en efecto, inclinados sobre la horizontal, y lo estarán con respecto a

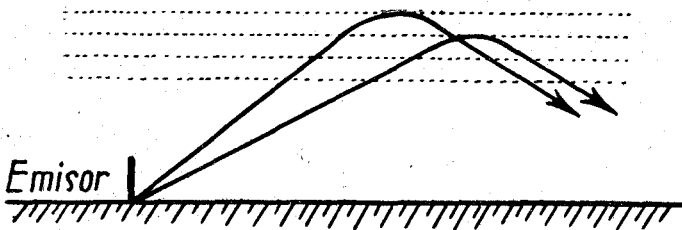


Fig. 34

la vertical los vectores del campo eléctrico, perpendiculares a dicho radio. Aun cuando el emisor se encuentre sobre el terreno, los rayos de propagación de la energía provienen, en ciertos casos, de una reflexión difusa en las capas ionizadas de la alta atmósfera, como se verá más adelante, y llegan al receptor más o menos inclinados (fig. 34).

2.<sup>a</sup> Una antena disimétrica emisora posee también efectos directivos.

Consideremos, en efecto, también ahora una antena acodada (figura 35), y supongamos que, en un instante dado, el sentido de la corriente es el indicado en la figura por las flechas. Consideremos

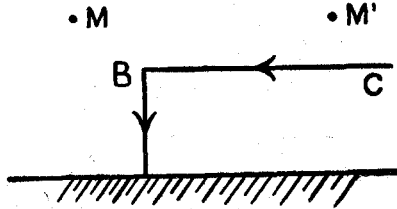


Fig. 35

los campos *magnéticos* creados en  $M$  y  $M'$  por dicha corriente descendente.

Es evidente sobre la figura que los campos debidos a  $AB$  y  $BC$  se añaden en  $M$  y se restan en  $M'$ , si  $M$  y  $M'$  están a alturas superiores a las de la antena

## CAPITULO VI

### Resistencia en alta frecuencia.

#### *Conductores usuales. — Pérdidas.*

45. *Resistencia de un conductor plano en alta frecuencia.*—Volvamos al caso de la propagación a lo largo de un conductor plano: Para calcular la resistencia en alta frecuencia de este conductor, es decir, para hacer la evaluación de la cantidad total de calor desprendido, será preciso integrar las cantidades elementales de calor correspondientes a una faja del conductor, de anchura  $l$  y de longitud  $x$ , contada paralelamente a la dirección de la corriente y de espesor  $dz$ , tomado en el sentido de la profundidad. Siendo  $J$  la densidad de corriente, la cantidad elemental de calor será:

$$dQ = R i^2 dt = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{x}{ldz} (J l dz)^2 dt$$

$$dQ = \frac{1}{\sigma} x l J^2 dz dt \quad [50]$$

expresión en la cual  $J$  debe ser reemplazada por su valor [48]:

$$J = J_0 e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right)$$

Para obtener un valor medio de la potencia gastada, integraremos primero la expresión de  $dQ$  durante un tiempo,  $t$ , que tomaremos igual a medio período:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

Dividiendo la expresión que se obtenga por  $t$ , obtendremos el valor de la potencia media elemental, es decir, de la cantidad de calor desprendida en la unidad de tiempo en la faja del conductor que se considera.

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dQ = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{\sigma} x l dz \left[ J_0 e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right) \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{\sigma} x l dz J_0^2 e^{-\frac{2z}{a}} \left[ \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\omega t - \frac{z}{a}\right) dt \right] \end{aligned}$$

Poniendo  $\omega t - \frac{z}{a} = p$ , se tiene  $\omega = \frac{dp}{dt}$ ,  $dt = \frac{1}{\omega} dp$ ; la cantidad entre corchetes de la expresión anterior es igual a:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega t} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \cos^2 p dp &= \frac{2}{\omega T} \left[ \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2p \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \\ &= \frac{1}{\omega t} \left[ \frac{1}{2} \left(\omega t - \frac{z}{a}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2\omega t - \frac{2z}{a}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} = \\ &= \frac{1}{\omega t} \left\{ \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{z}{a}\right) + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(2\pi - \frac{2z}{a}\right) - \left[ -\frac{z}{2a} + \frac{1}{4} \operatorname{sen} \left(-\frac{2z}{a}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{2\pi}{2\omega T} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y substituyendo este valor

$$dQ = \frac{1}{2} \frac{x l dz J_0^2 e^{-\frac{2z}{a}}}{\sigma}$$

Integrando ahora  $dQ$  con relación a  $z$  en toda la profundidad



del conductor, o sea, entre  $z = 0$  y  $z = \infty$ , obtenemos la potencia total:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\sigma} x l J_0^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2z}{a}} dz = -\frac{a}{4\sigma} x l J_0^2 \left[ e^{-\frac{2z}{a}} \right]_0^\infty = \\ &= -\frac{a}{4\sigma} x l J_0^2 [0 - 1] = \frac{1}{4\sigma} a x l J_0^2 \end{aligned} \quad [51]$$

La interpretación de esta expresión es muy sencilla: significa que el calor producido es el mismo que si la corriente de alta frecuencia total (\*),

$$I = \int_0^\infty J l dz = l J_0 \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \quad [52]$$

pasase toda ella y uniformemente repartida en una capa de espesor igual a

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma \mu \omega}$$

En efecto: el calor desarrollado por una corriente alterna es igual al producto de la resistencia por el cuadrado de la intensidad eficaz, y esta última es igual al valor máximo dividido por  $\sqrt{2}$ ; luego

(\*) Esta integral se desarrolla por el procedimiento indicado en Laboureur (página 308) dando como resultado

$$\int_0^\infty J l dz = \int_0^\infty l J_0 e^{-\frac{z}{a}} \cos \left( \omega t - \frac{z}{a} \right) dz = l J_0 \frac{a}{2} (\cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t)$$

pero

$$\begin{aligned} \cos \omega t + \operatorname{sen} \omega t &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \cos \omega t \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{sen} \omega t \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left( \cos \omega t \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Sustituyendo tendremos:

$$I = \int_0^\infty J l dz = l J_0 \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) = l J_0 \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$I_e = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{l J_0 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{l J_0 a}{2}$$

$$Q = \frac{l^2 J_0^2 a^2}{4} \times \frac{x}{\sigma l a} = \frac{1}{4 \sigma} a x l J_0^2 \quad [53]$$

valor igual al obtenido en [51].

Podemos, por tanto, concluir que las *pérdidas, y, por consiguiente, la resistencia en alta frecuencia, son las mismas que si la corriente estuviese repartida uniformemente en el espesor a.*

46. *Resistencia en alta frecuencia de los conductores rectilíneos:*

a) *Conductores cilíndricos gruesos o barras.*—Se supone el diámetro del conductor grande con relación a la penetración  $a$ . La cantidad de calor desprendida es la misma que si la corriente estuviese uniformemente repartida en un tubo de espesor  $a$ , y la resistencia del conductor será la de este tubo en corriente continua.

Para un conductor cilíndrico de longitud  $l$  y de perímetro  $p$ , la resistencia en alta frecuencia es, pues, sensiblemente igual a

$$R_{AF} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{p a}$$

Si  $R$  es el radio del cilindro, tenemos:

$$p = 2 \pi R$$

y

$$R_{AF} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{2 \pi R a} \quad [54]$$

o reemplazando  $a$  por su valor y haciendo, como ya dijimos,  $\mu = 1$ .

$$R_{AF} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2 \pi R} \sqrt{2 \pi \sigma \omega} = \frac{l}{R} \sqrt{\frac{\omega}{2 \pi \sigma}} = \frac{l \sqrt{\omega}}{R \sqrt{2 \pi \sigma}} \quad [55]$$

La resistencia crece en razón inversa del diámetro, como la raíz cuadrada de la frecuencia, y solamente como la raíz cuadrada de la resistividad, porque el aumento de resistividad es, en parte, compensado por el aumento de penetración de las oscilaciones en el espesor del metal.

En baja frecuencia, la resistencia es igual a la corriente continua, y sería:

$$R_{BF} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{\pi R^2} \quad [56]$$

La comparación con [54] da:

$$\frac{R_{AF}}{R_{BF}} = \frac{R}{2a}$$

Si  $R = 2a$ , se tiene  $R_{AF} = R_{BF}$ ; el efecto *skin* o *de piel* no existe entonces, y la penetración va hasta el centro.

Si  $R > 2a$ , se tiene  $R_{AF} > R_{BF}$ ; es decir, que para gruesos hilos la penetración no alcanza el centro del conductor, la parte interna no sirve para nada y se puede tomar un tubo en lugar de un conductor macizo. En las grandes emisoras se utilizan tubos de uno a dos milímetros de espesor.

b) *Alambres delgados.*—Si los alambres son muy delgados, la distribución de la corriente es uniforme en toda su sección recta, cualquiera que sea la frecuencia, y la resistencia permanece invariable. Se considera en la práctica que un alambre tiene la misma resistencia en alta frecuencia que en corriente continua cuando su diámetro es menor que vez y media la penetración ( $d < \frac{3}{2} a$ ).

47. *Resistencia en alta frecuencia de los cuerpos magnéticos.*—Los cálculos anteriores no son tan rigurosos en los cuerpos magnéticos, cuya permeabilidad, como sabemos, no es una cantidad constante. Sin embargo, si las variaciones cíclicas de la intensidad del campo se mantienen dentro de la parte recta de la curva característica, se puede admitir sin error sensible que  $\mu$  es constante. La fórmula [55] en este caso

$$R_{AF} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2\pi R} \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} = \frac{l\sqrt{\omega\mu}}{R\sqrt{2\pi\sigma}} \quad [57]$$

demuestra que, a causa de la gran reducción de la penetración de las oscilaciones (penetración inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la permeabilidad), la resistencia aumenta fuertemente en los cuerpos magnéticos, tales como el hierro,

Como, por otra parte, la conductibilidad del hierro es de seis a siete veces menor que la del cobre, resulta que la resistencia en alta frecuencia de aquel metal es unas 50 veces mayor que la de éste.

Es preciso, por tanto, evitar la utilización del hierro para constituir los circuitos eléctricos de alta frecuencia. Por ello, se proscriben los alambres de acero en la construcción de los hilos de antena, para los que se emplean preferentemente alambres de bronce, materia casi tan conductora como el cobre y que goza de resistencia mecánica suficiente. Sin embargo, en aquellos casos excepcionales en que se necesite una gran resistencia mecánica, se recurre al empleo de alambre de acero, forrado con un tubo de bronce conductor de espesor suficiente (del orden del milímetro), en el que se localizan las corrientes de alta frecuencia.

#### 47'. *Autoinducciones de antenas:*

a) *Autoinducciones de antena en tubo de cobre.*—Los cálculos anteriores no sirven nada más que para conductores rectilíneos. Cuando se curvan estos conductores, la repartición de la corriente puede cambiar. Es difícil entonces encontrar la localización exacta, pero se puede encontrar bastante fácilmente la repartición aproximada. Los cálculos se hacen asimilando primeramente los conductores a cuerpos de resistividad nula y determinando en ellos la distribución puramente superficial de las corrientes. Se admite a continuación que estas corrientes superficiales se reparten en profundidad, según la misma ley que para el caso límite de los conductores planos estudiados anteriormente. La energía eléctrica está en los dieléctricos, y por ellos es por donde se transmite. Cuando la transmisión de la energía se hace a baja frecuencia, los efectos exteriores tienen tiempo de penetrar en toda la masa del metal; pero cuando la frecuencia es muy grande, la corriente en un sentido no tiene tiempo de establecerse en toda la sección, antes del momento en que cambia el sentido de la acción, para producir una corriente de sentido inverso.

Es natural que para los conductores enrollados la corriente se localice en la parte interior de las bobinas, puesto que el campo es más intenso en el interior que en el exterior, donde es casi nulo. La energía no penetra apenas más que por la cara interna. También podría razonarse diciendo que si dividimos la espira en dos filetes, uno interior y otro exterior, este último tendrá más autoinducción que el primero por abrazar más flujo, oponiendo por consiguiente más resistencia al paso de la corriente.

En cuanto a la repartición en profundidad, se puede admitir que sigue la ley exponencial explicada anteriormente. Esto no es exacto, pero es suficiente para los cálculos de la práctica. La superficie útil de cada espira viene a ser un tercio de la total. Si las espiras están muy separadas, la corriente ocupa un poco más que la superficie interna, pues por los intersticios entre espiras sale algo del campo, que penetra también en el conductor por esas partes. La resistencia en este último caso viene a ser una y media a dos veces la de corriente continua, en lugar de tres, como en el caso de espiras unidas. Aumentando la separación de las espiras, se disminuye la resisten-

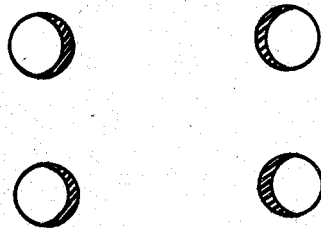


Fig. 36

cia de la bobina, pero se necesitan bobinas muy grandes para alcanzar autoinducciones dadas; por esta razón hay que buscar un término medio, que la práctica ha sancionado como bueno para la separación de las espiras, que viene a ser el doble del diámetro del hilo empleado.

En las espiras extremas nace una nueva pérdida de energía, y es la debida a las corrientes de Foucault, que nacen por la curvatura que toma el campo magnético en dichas extremidades por no existir la espira antagonista siguiente. Las pérdidas en estas espiras extremas son mucho mayores que en las centrales, y se observa, en efecto, que las autoinducciones de antena se calientan hacia sus extremidades. Para reducir estas pérdidas hacía falta cambiar el modo de construcción de esta autoinducción de tubos, o no se las debiera construir en solenoides sencillos, sino separar las espiras extremas más que las centrales. Pero se debiera, sobre todo, gastar más cobre, haciendo los solenoides de tubos más gruesos. Sería también conveniente graduar el diámetro de los tubos: los más gruesos en la parte central, para desarrollar la superficie conductora interna, que es la útil, y los más delgados en las extremidades, para reducir las corrientes de Foucault.

b) *Autoinducciones de antena de cintas.*—Por consideraciones parecidas a las anteriores se podrá demostrar el mal resultado de las autoinducciones de antena hechas apilando galletas de cinta metálica en espiral plana.

Las autoinducciones de antena de cinta sólo son admisibles cuando tienen únicamente una galleta plana de dimensiones suficientes.

48. *Empleo de hilos divididos.*—Puesto que la corriente se localiza en la superficie interior del conductor, la parte exterior no sirve para nada. Si se toman dos conductores aislados y se los retuerce uno sobre el otro antes de arrollarlos en el solenoide, la corriente se divide en dos partes y utiliza los dos caminos que se le presentan, y que están tan pronto en el interior como en el exterior. Se

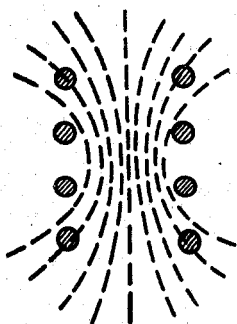


Fig. 37

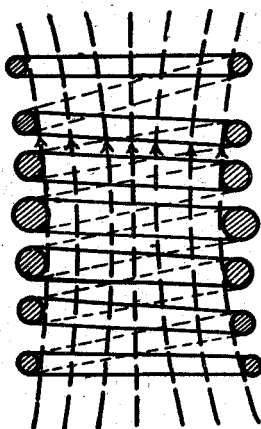


Fig. 38

puede tomar así un gran número de hilos muy finos para retorcercelos en un cable; ya no hay hilo interior o exterior propiamente hablando, y la corriente se reparte regularmente si todos los hilos juegan el mismo papel.

La reducción de las pérdidas en alta frecuencia en los conductores puede así disminuirse mucho, por el empleo sistemático de torones de hilos aislados hechos de un metal no magnético. El diámetro de los hilos elementales debe ser bastante pequeño para que el efecto pelicular sea allí poco sensible, y hay siempre ventaja en tomar hilos muy finos, tan finos como lo permita el aumento del precio de kilogramo de cobre para hilos muy finos.

En la práctica se podrá bajar hasta los 12/100 milímetros.

Observemos también que los diversos trozos de cable deben retorcerse de una manera regular, de forma que cuando todos los trozos estén soldados en las dos extremidades, el circuito formado por dos cualesquiera de ellos no ofrezca, en ninguna parte, superficies eléctricas expuestas al flujo magnético alternativo, en las cuales se producirían corrientes que perjudicarían. Lo mejor de todo es torcer los hilos primeramente de tres en tres, o, en realidad, de siete en siete; después empezar a retorcer los torones así formados de igual manera y continuar en esta forma.

49. *Pantallas electromagnéticas.* — La teoría de la penetración de las ondas electromagnéticas en el interior de los cuerpos conductores va a permitirnos estudiar el funcionamiento de las *pantallas* o *jaulas de Faraday*:

Consideremos, por ejemplo, una sala cuyas paredes estén recubiertas de una placa de metal no magnético ( $\mu = 1$ ), y supongamos que desde fuera se lanza sobre aquélla oscilaciones electromagnéticas de intensidad constante y frecuencia creciente.

Supongamos para facilitar nuestra explicación que las paredes de la sala sean planas: considerando la placa metálica que cubre una cualquiera de ellas se puede tomar como plano de las  $x$  y la superficie de esta placa, en contacto con la pared, y aplicar las ecuaciones [42], [43], [45] o [46]:

$$\frac{4 \pi \sigma h_x}{c^2} = \frac{\delta H_y}{\delta z}, \quad -\mu \frac{\delta H_y}{\delta t} = \frac{\delta h_x}{\delta z}, \quad h_x = h_{x0} e^{-\frac{z}{a}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{a}\right), \quad a =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}}$$

Si las oscilaciones son lentas ( $\omega$  pequeño) se produce en la masa metálica de las placas una corriente de conducción importante, que absorbe la casi totalidad de la energía de las ondas electromagnéticas; la corriente de desplazamiento es entonces prácticamente nula, y otro tanto sucede con la intensidad del campo eléctrico. Al ser

$h_x = 0$ ,  $\frac{\delta H_y}{\delta t} = 0$ , o sea, que la intensidad del campo magnético permanece constante. A medida que aumenta la frecuencia, aumenta proporcionalmente la importancia de la corriente de desplazamiento y, por tanto, el campo eléctrico que penetra en el interior de la sala. Pero el aumento progresivo de  $\omega$  va disminuyendo el valor de la penetración; y en cuanto este valor sea bastante inferior al

espesor de la placa metálica, el campo eléctrico en el interior de la sala será nulo.

En resumen: en el interior de la sala, el campo eléctrico detenido al principio completamente por la pantalla metálica, cuando las oscilaciones son lentas, aumenta después proporcionalmente a la frecuencia, pasa por un máximo y decrece luego rápidamente hasta anularse, en cuanto el valor de la penetración es mucho menor que el espesor de la placa metálica.

Hemos dicho antes que la intensidad del campo magnético es sensiblemente constante cuando las oscilaciones son lentas. Ahora bien: en cuanto el valor de la penetración sea inferior al espesor de la placa, es decir, cuando para un valor determinado de  $z$  sea  $\frac{d h_x}{d z} = 0$ , de la segunda de las fórmulas antes transcritas se deduce que  $\frac{d H_y}{d t} = 0$ . Pero si el campo varía sinusoidalmente,  $H_y = H_{y_0} \text{ sen } \omega t$ ; de donde  $\frac{d H_y}{d t} = \omega H_{y_0} \text{ cos } \omega t$ , lo cual exige que para que  $\frac{d H_y}{d t} = 0$ , que  $H_{y_0} = 0$ . En resumen: el campo magnético disminuye primero muy lentamente, en tanto que la penetración  $a$  sea mayor que el espesor de las paredes de la sala, para tender después rápidamente hacia cero en cuanto la frecuencia haga dicha penetración inferior al referido espesor.

De las consideraciones precedentes se deduce que, cuando el espesor de la pantalla metálica es notablemente mayor que la profundidad de penetración, no pasa ningún campo eléctrico ni magnético al interior de la sala.

50. *Pérdidas por corrientes inducidas en las pantallas electromagnéticas.*—Los aparatos de alta frecuencia se encuentran inevitablemente, en general, cerca de cuerpos más o menos conductores, tales como el suelo, los muros de la sala, las placas metálicas de las pantallas electromagnéticas, etc., y las oscilaciones de tales aparatos engendran en dichos cuerpos corrientes inducidas; los circuitos de estas corrientes y las de los aparatos forman entonces sistemas de circuitos acoplados, cuya impedancia es de la forma  $(R_1 + K^2 R_2) + j(S_1 - K^2 S_2)$ . Las corrientes inducidas originan, por tanto, como una disminución de la autoinducción y un aumento de la resistencia óhmica de los circuitos principales, y las pérdidas en alta frecuencia aumentan consiguientemente.



Cuando los aparatos están encerrados en una caja metálica continua, que sirve de pantalla protectora, el espesor y la naturaleza de sus paredes influyen en la cuantía de las pérdidas.

Consideremos varias cajas del mismo metal, pero de espesor creciente: Las pérdidas en sus paredes aumentan primero a medida que aumenta el espesor, pues llamando  $E$  al valor eficaz de la f. e. m. de inducción, que producen las corrientes inducidas, f. e. m. que debe considerarse como un dato del problema, ya que depende de la intensidad y de la frecuencia de las oscilaciones, y  $R$  a la resistencia de los circuitos por donde circulan dichas corrientes, las pérdidas son de la forma  $I^2 R = \left(\frac{E}{R}\right)^2 R = \frac{E^2}{R}$  y, por tanto, mayores cuanto más grande es el espesor a causa del consiguiente decrecimiento de  $R$ ; ahora bien: sabemos que las corrientes inducidas forman un flujo magnético que, en virtud de la ley de Lenz, se opone al flujo inductor, es decir, al flujo de alta frecuencia producido por las corrientes de los aparatos; se ha visto que al aumentar el espesor, aumenta la intensidad de las corrientes inducidas y, por tanto, el flujo antagonista, llegando un momento en que este flujo reduce de tal modo al inductor que la consiguiente disminución de la f. e. m.  $E$  es causa de que las pérdidas no sigan aumentando. Se comprende, desde luego, que el valor límite de las pérdidas corresponde a un espesor de las paredes de la caja, igual a la penetración  $a$ ; en efecto: un espesor mayor no tiene eléctricamente ningún objeto, pues las ondas no penetran más, y  $R_1$  no disminuye ya, aunque el espesor siga aumentando.

Comparemos ahora dos cajas de distinto metal, y cuyo espesor sea el correspondiente a la penetración  $a$  de cada uno de los metales que las forman: Trazando en las cajas dos circuitos de igual longitud y anchura,  $l$  y  $m$ , las pérdidas en cada una de ellas se expresarán por:

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{R} &= \frac{E^2}{\rho \frac{l}{m a}} = \frac{E^2}{m \sigma \frac{l}{\sqrt{2 \pi \sigma \omega}}} = \frac{E^2}{m \sigma} = \frac{E^2}{m \sqrt{2 \pi \omega}} = \\ &= \frac{m}{l \sqrt{2 \pi \omega}} E^2 \sqrt{\sigma} \end{aligned}$$

y serán, por tanto, directamente proporcionales a la raíz cuadrada

de la conductibilidad respectiva. No conviene, sin embargo, emplear los metales más resistentes, porque los espesores de penetración son más grandes, empleándose habitualmente el cobre para la construcción de las pantallas.

No conviene, desde luego, hacer las pantallas de hierro, porque la inducción magnética sería muy grande, la f. e. m.  $E$  adquiriría un valor considerable y las pérdidas serían muy elevadas.

Muchos constructores se limitan a revestir las cajas de ciertos aparatos de alta frecuencia con papel de estaño. Esta protección es puramente ilusoria, porque el espesor del papel de estaño es muy inferior a la penetración de este metal; las corrientes que se inducen en él producen, en cambio, un aumento del amortiguamiento de los circuitos que se desean proteger.

Las pantallas electromagnéticas se emplean para proteger ciertos aparatos de las acciones exteriores o para disminuir las pérdidas que las oscilaciones de alta frecuencia, producidas en una sala, originan en sus paredes. En este último caso sólo debe ponerse la pantalla cuando, por ser las paredes medianamente conductoras, las pérdidas que se prevean justifiquen el gasto de su establecimiento. Para evaluar *grosso modo* las pérdidas en un muro atravesado por un flujo magnético alterno, se asimila el muro a un anillo conductor, calculándose la intensidad de la corriente inducida por la fórmula  $IR = \frac{d\Phi}{dt}$  ( $I$  y  $\Phi$  valores eficaces).

51. *Pérdidas por corrientes inducidas en el suelo cerca de la*

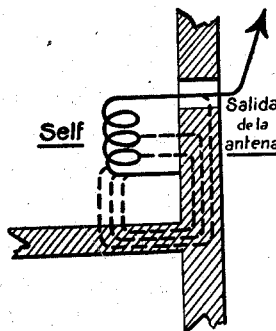


Fig. 39

*toma de tierra.*—En las instalaciones de radio es preciso vigilar la instalación de las canalizaciones que conducen la corriente de la antena hacia las tomas de tierra; es preciso evitar que estas canaliza-

ciones pasen demasiado cerca de un muro medianamente aislador y, sobre todo, cerca del pavimento de las salas de máquinas, pues este piso es, en general, de hormigón armado. Se tendría, en efecto, por inducción en el suelo o en los muros, gastos de energía que no son despreciables.

52. *Pérdidas debidas a las corrientes de carga por influencia electrostática.*—La autoinducción de antena y la salida de antena de una estación emisora forman, con las paredes del edificio, una especie de condensador, que soporta, prácticamente, toda la alta tensión de la antena (\*). Las corrientes de carga de este condensador, obligadas a pasar por el muro y el suelo, originan pérdidas de energía que pueden llegar a ser importantes.

Para evitar estas pérdidas puede encerrarse la autoinducción de antena en una jaula de Faraday, de paredes metálicas continuas; se protegerían así por completo las paredes medianamente conductoras de la sala, pero se originarían, en cambio, corrientes inducidas en la coraza de chapa de cobre. El autor de un proyecto de estación emisora debe evaluar la importancia relativa:

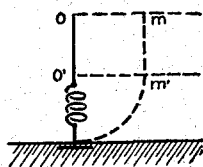
a) De las pérdidas de energía en muros no protegidos, por causa de las corrientes de carga debidas al efecto de capacidad.

b) De las debidas a corrientes inducidas en muros no protegidos.

c) De las ocasionadas, en una jaula protectora, por las corrientes inducidas en ella.

Puede suceder que de dicha evaluación se deduzca que la importancia de las pérdidas c) sea mayor que las de b), en cuyo caso no ha lugar a proteger de los efectos de inducción en los muros. En este caso, no debe pensarse más que en evitar el efecto de las corrientes de capacidad, lo que se consigue, con excelentes resultados, colocando alrededor de la autoinducción de antena una serie de alambres verticales, colgados de aisladores y unidos en su parte inferior a un conductor conectado a tierra. Se tendrá cuidado de que los

(\*) Se verá más adelante que una autoinducción de antena alarga su propia onda la tensión en  $O'$  (salida de antena) es casi igual a la tensión máxima  $O m$ .



alambres no formen ningún circuito cerrado en el que puedan desarrollarse corrientes inducidas.

## CAPITULO VII

### Penetración y repartición de las corrientes en el pie de la antena.

#### *Pérdidas en la toma de tierra.*

53. *Penetración y repartición de las corrientes en el suelo al pie de la antena: Caso de un suelo conductor.*—Durante la emisión de una señal radiotelegráfica, las oscilaciones eléctricas de la antena no se detienen en el pie de la misma. La corriente que llega por la bajada de antena se prolonga por una corriente que pasa, según los casos, bien al contrapeso colocado en la base cuando no hay toma de tierra, bien al suelo mismo cuando la antena está unida a tierra sin el empleo de un contrapeso. Si la tierra fuera asimilable a una gran

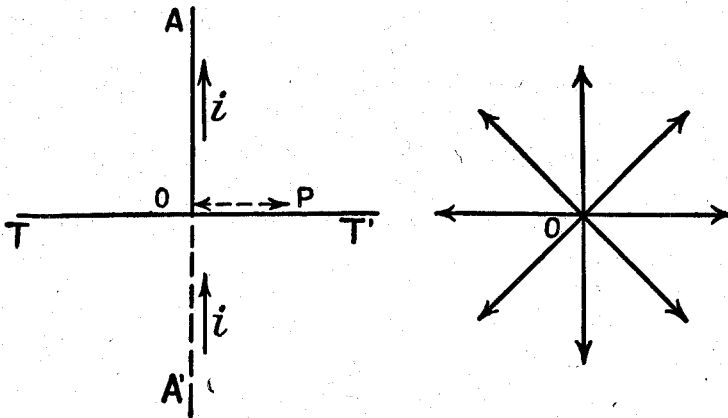


Fig. 40

placa de cobre rojo o, mejor, a un cuerpo infinitamente conductor, la toma de tierra de la antena se haría simplemente por una conexión directa, y podríamos darnos cuenta fácilmente de la repartición de las corrientes en la superficie del suelo, como vamos a ver en los dos párrafos siguientes.

54. *Caso de la antena vertical sobre un suelo infinitamente conductor.*—Sea, por ejemplo (fig. 40), una antena  $OA$ , de altura  $h$ , colocada encima de un suelo infinitamente conductor,  $TT'$ . Veremos

más adelante que el campo electromagnético de la antena  $OA$  es el mismo (por razón de simetría) que el que se obtendría encima del plano  $TT'$ , imaginando que se suprime el terreno conductor y que se reemplaza dicho terreno por una segunda antena  $OA'$ , simétrica de  $OA$ , en la cual las corrientes serían en cada instante las mismas que en la antena  $OA$  y del mismo sentido, es decir, que  $A'$  se carga negativamente, en tanto que  $A$  se carga positivamente.

Si consideramos un punto  $P$  cerca del suelo  $TT'$ , a una distancia  $x$  del eje, distancia notablemente más pequeña que la altura de la antena  $h$ , el campo magnético en  $P$  es sencillamente el campo de la corriente  $I$  que existe en medio de la antena ficticia  $AA'$  es decir:

$$H = \frac{2I}{x} \quad [58]$$

esta expresión [58] nos da también el valor del campo real cerca del suelo en  $P$ , cuando se considera solamente la antena real y que se designa por  $I$  la intensidad de la corriente atravesando la toma de tierra.

Pero sabemos que en la superficie de un cuerpo infinitamente conductor, la densidad de corriente,  $J$ , está ligada al valor del campo por la relación:

$$H = 4\pi J \quad [59]$$

De las igualdades [58] y [59] deducimos la condición:

$$J \cdot 2\pi x = I$$

Hubiéramos podido escribir esta condición de una manera intuitiva, dejándonos guiar por una analogía hidráulica y diciendo: *la corriente que cae de la antena sobre el suelo se reparte como lo haría una corriente de agua repartiéndose todo alrededor de la antena*; el gasto de electricidad es el mismo en toda la circunferencia centrada con la antena y la densidad de corriente varía, por consiguiente, en razón inversa de la distancia al pie de la antena.

La repartición de la corriente no será la que acabamos de decir, desde que la distancia  $x$  cese de ser pequeña con relación a la altura de la antena. Una parte de la corriente se detiene en ruta, porque hace falta abandonar en el suelo las cantidades de electricidad ne-

cesarias para la alimentación de las cargas electrostáticas que deben, necesariamente, extenderse en el plano conductor  $T T'$  a todos los puntos en donde concurren líneas de fuerza del campo eléctrico que emana de la antena.

55. *Caso de la antena en T y de la antena en paraguas sobre un suelo infinitamente conductor.*—Se encuentra una repartición de las corrientes en el suelo casi idéntica a la que acabamos de estudiar, cuando en lugar de constituir la antena con un simple hilo vertical se la constituya por una subida vertical extendida después por una capa de hilos sostenida por pilones, como son las antenas en T o en paraguas. En este caso, todavía la corriente superficial se reparte en estrellas todo alrededor de la toma de tierra.

56. *Caso de la antena en V y de la antena en  $\sqcap$ .*—Frecuentemente la bajada de antena está colocada en la extremidad de una capa de hilos paralelos o poco divergentes, sostenidos entre dos líneas de mástiles (antenas en V o en  $\sqcap$ ).

Para estas forma de antenas, la repartición de la corriente no es ya simétrica alrededor de la toma de tierra; después de partir simétricamente en estrella, como en el caso precedente, las líneas de corriente se curvan y se concentran hacia la parte del terreno situado debajo de la antena, allí donde deben acumularse las cargas de signo contrario a las de la antena, allí donde hace falta, por consiguiente, que una cierta corriente venga a aportar las cantidades de electricidad necesarias para la constitución de estas cargas.

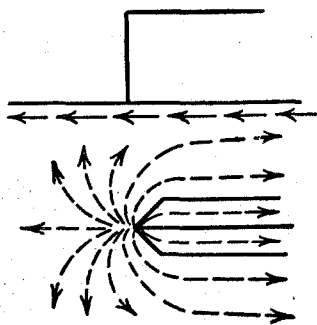


Fig. 41

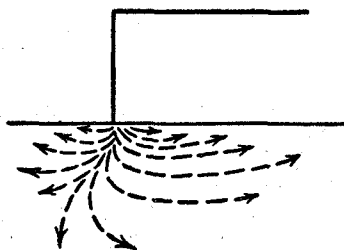


Fig. 42

La figura 41 puede dar una idea de la repartición de la corriente bajo las antenas de que nos ocupamos.

57. *Caso de tierras que se presentan en la práctica. Penetración en profundidad.*—Como hemos dicho muchas veces, la asimilación

de la tierra a un conductor perfecto no es más que una aproximación; las corrientes penetran en el suelo hasta una cierta profundidad, y hemos visto que esta penetración varía de algunos decímetros hasta algunas decenas de metros, según que se trate de ondas cortas o largas y según que el suelo sea más o menos conductor.

Para una antena en  $\perp$ , por ejemplo, la distribución de las corrientes bajo la antena continúa siendo similar a la que hemos dicho. En proyección horizontal, las líneas de corriente conservan la forma general dada por la figura 41, pero estas líneas de corriente descienden en el espesor del terreno y su disposición es la de la figura 42, que representa, esquemáticamente, un corte vertical del terreno a lo largo de una antena en  $\perp$ .

58. *Evaluación de la resistencia de la tierra. Caso de una toma de tierra única. Pozos salados.*—La corriente  $I$  de la antena pasa entera a la tierra, la cual calienta. Para un terreno dado y para una longitud de onda dada, la disipación de potencia eléctrica en el suelo, proporcional al cuadrado de la corriente, puede estar representada por una expresión de la forma  $RI^2$ , en la que  $R$  es la *resistencia de la tierra*. Esta resistencia no es solamente función del terreno y de la manera como está establecida la toma de tierra, de-

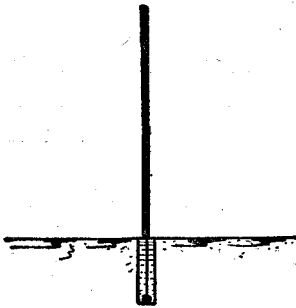


Fig. 43

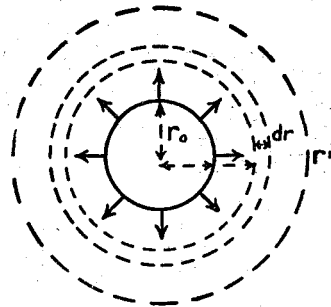


Fig. 44

pende también de la longitud de onda: *la resistencia de la tierra disminuye cuando la longitud de onda aumenta*, porque las ondas penetran más profundamente en el terreno y circulan en conductores de mayor sección.

En el caso de que la toma de tierra hubiera sido hecha colocando un cilindro metálico en el fondo de un pozo aforado en una capa de agua conductora a débil profundidad (fig. 43), es posible darse cuenta de lo que puede valer la resistencia de esta tierra.

Asimilemos un pozo arbitrariamente esta toma de tierra a una bola de radio  $r$  colocada en un medio de resistividad  $\rho$ . Las líneas de corriente abandonan normalmente la esfera central de radio  $r_0$  (figura 44); para atravesar sucesivamente esferas concéntricas de radio  $r$ , la corriente total  $i$  atraviesa sucesivamente conductores de sección  $4 \pi r^2$  y espesor  $d r$ , cuya resistencia es

$$dR = \frac{\rho}{4 \pi r^2} d r$$

Para alcanzar una esfera de radio  $r'$  hace falta, pues, atravesar un conductor de resistencia total

$$R = \frac{\rho}{4 \pi} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r'} \right)$$

expresión en la cual el primer término es el más importante, de suerte que podemos escribir

$$R = \frac{\rho}{4 \pi r_0}$$

Si, por ejemplo, la resistividad del terreno húmedo es de 10.000 ohms. por cm., y si la toma de tierra está hecha en un volumen próximamente de un metro cúbico de agua ( $r = 50$  cm.), la resistencia que resultaría sería

$$R = \frac{10.000}{4 \pi \cdot 50} \text{ ohm} = 16 \text{ ohmios}$$

Pero esto no es más que un mínimo. Se ha supuesto, en efecto, la repartición uniforme alrededor de la toma de corriente; cuando, en realidad, la corriente no puede apenas pasar más que en la mitad del terreno, por debajo del plano de agua (la parte superior es poco conductora), la resistencia aumenta entonces, pero sin poder alcanzar, sin embargo, el doble del valor precedente.

Según lo que acabamos de ver, la resistencia de nuestra toma de tierra única depende mucho de las pérdidas en la *proximidad inmediata* del pozo. Habría, pues, una gran ventaja en que en esta región el suelo fuera más conductor. Se puede llegar a ello echando



sal marina en el pozo, para así aumentar la conductibilidad de las aguas.

Algunos kilogramos de sal son suficientes y cuestan muy poco. Pero es arrastrada por la corriente de agua subterránea y hace falta renovarla. El empleo de pozos salados como toma de tierra no es, pues, utilizable en práctica corriente más que si la corriente de agua es muy lenta.

59. *Pozos profundos*—Cuando la toma de tierra está hecha en un pozo descendiendo profundamente en la capa líquida (fig. 45), se debe considerar que las líneas de corriente salen horizontalmente de las paredes del pozo. Esto es cierto si se trata de un aforo metálico y sólo es aproximado para un pozo ordinario porque el agua del pozo es más conductora que el terreno húmedo que lo rodea. Para pasar del cilindro de radio  $r_0$  formado por el pozo a un cilindro de radio  $r'$ , se debe atravesar conductores cilíndricos elementales de altura  $h$ , de radio  $r$  y de espesor  $dr$ , cuyas resistencias son iguales a

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r h}$$

Siendo  $h$  la profundidad útil del aforo y  $\rho$  la resistividad del terreno.

La resistencia total es, pues,

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \int_0^{r'} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi h} L \frac{r'}{r_0}$$

Calculando la resistencia hasta una distancia  $r'$  igual próximamente a 20 veces el radio  $r_0$  del aforo, la resistencia de la toma de tierra puede ser evaluada en:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} L 20 = \frac{\rho}{2\pi h} 3 \approx \frac{\rho}{2h}$$

Un pozo de 10 metros de profundidad aforado en un terreno húmedo de una resistividad de 10.000 ohms-cm. dará, pues, una resistencia de tierra igual a

$$R = \frac{10.000 \text{ ohm} \cdot \text{cm}}{2 \times 10 \text{ m}} = 5 \text{ ohms}$$

60. *Toma de tierra por hilos enterrados.*—En lugar de aforar pozos, se puede, por razón de economía, contentarse con enterrar gruesos hilos de cobre en trincheras cavadas bastante profundamente para alcanzar la capa de agua, lo que es muy económico cuando la capa de agua está, por ejemplo, a menos de un metro de la superficie (fig. 46).

El cálculo de la resistencia en la proximidad del hilo es completamente semejante al que precede; ahora bien, puesto que se parte de un cilindro conductor de muy pequeño diámetro, hace falta admitir para la relación  $\frac{r'}{r_0}$  un valor mucho más grande que en el caso del pozo. Se tomará, por ejemplo, para esta relación el número 1.000, cuyo logaritmo neperiano es próximo a 7. Suponiendo que los hilos de la toma de tierra tengan una longitud de 50 metros y que la re-

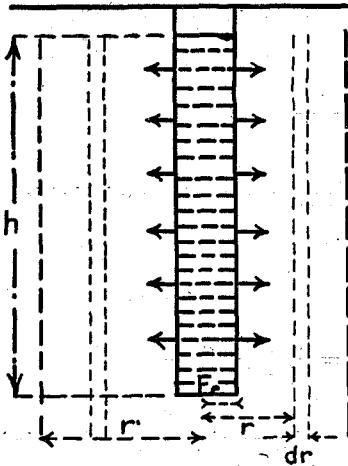


Fig 45

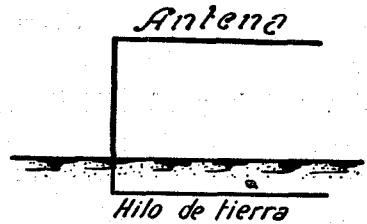


Fig. 46

sistividad del terreno sea todavía 10.000 ohms-cm., la resistencia de la toma de tierra será de

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} L 1.000 = \frac{\rho}{2\pi h} \times 7$$

o sea, aproximadamente

$$R = \frac{10\,000 \text{ ohms-cm}}{2\pi \times 50 \text{ m}} \cdot 7 = \frac{10.000}{5.000} = 2 \text{ ohms}$$

Pero este valor está calculado por defecto, porque la corriente no puede subir mucho por encima del nivel del hilo, en el terreno seco, y estimamos que en el caso actual la resistencia es próxima de 3 *ohms*.

Este valor es mucho más pequeño que el encontrado en el párrafo precedente para la resistencia de un aforo de 10 metros de profundidad, lo que nos permite enunciar esta conclusión.

*Cuando la capa de agua es poco profunda, es de recomendar constituir la toma de tierra con hilos metálicos enterrados en trincheras cavadas hasta el nivel de la capa de agua.*

61. *Multiplicación de tomas de tierra próximas. Resistencia límite.*—Cuando en un terreno dado, una toma de tierra de ensayo ha producido una resistencia elevada, es natural pensar que se tendrá una resistencia dos o tres veces más débil agrupando en paralelo dos o tres tomas de tierra semejantes, repartidas cerca de la antena.

Es inútil distribuir un gran número de pozos en una circunferencia de radio  $A$  alrededor de la base de la antena: dos pozos muy próximos se molestan porque la corriente no sale ya, apenas, más que por los bordes exteriores de los pozos (fig. 47).

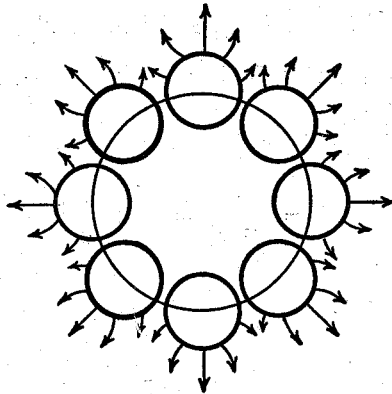


Fig. 47

Si tuviéramos una cintura continua de pozos sobre esta circunferencia de radio  $A$  o, para llevar las cosas al extremo, si estuviese completamente metalizado el terreno en una profundidad en todo el interior del círculo de radio  $A$ , subsistiría todavía, sin embargo, una resistencia límite cuya importancia podemos apreciar.

La corriente de antena  $I$ , bajando en el bloque de tierra metalizado, saldría en seguida de este bloque por su *periferia* y no por

debajo, porque la corriente de alta frecuencia no penetra más que a la profundidad  $a$  ya calculada.

Se puede entonces considerar que la corriente pasaría, en el suelo, a través de cilindros verticales, centrados con la antena, teniendo todos la misma altura  $a$ , y cuyos radios irían entrecruzándose. Entre dos cilindros de radio,  $r$  y  $r + dr$ , la resistencia del terreno sería

$$dR = \frac{\rho}{2\pi a r} dr$$

de suerte que entre los radios  $A$  del bloque metalizado y un radio mayor  $A'$  se introduciría necesariamente la resistencia

$$R = \frac{\rho}{2\pi a} L \frac{A'}{A}$$

Si la parte metalizada del suelo no tiene más que un radio  $A$  notablemente más pequeño que la altura de la antena, el cálculo precedente es aplicable hasta un radio exterior ( $A'$ ), que puede ser seis a siete veces más grande que  $A$ , se puede, pues, admitir para el logaritmo de  $\frac{A'}{A}$  el valor  $L 7 = 2$ , lo que conduce para el valor de la resistencia límite

$$R = \frac{\rho}{\pi a} = \sqrt{\frac{2\rho\omega}{\pi}}$$

teniendo en cuenta que

$$a = \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2\pi\omega}}$$

Tomemos, por ejemplo, el caso de una estación que trabaje en ondas de 15.000 metros sobre un terreno de resistividad de 10.000 ohms-cms.  $\rho = 10^{13}$  CGS, la resistencia límite sería en este caso

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{13} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 10^5}{3 \cdot 14}} \approx 1 \text{ ohm}$$

Y debemos todavía repetir que esta evaluación está hecha por *defecto*, puesto que hemos supuesto que la corriente saldría uniformemente toda alrededor del círculo  $A$ , lo que da el mínimo de calentamiento del terreno, cuando en realidad la corriente sale, de preferencia, del lado hacia el cual se encuentra la antena.

Debemos pensar todavía en la corriente que, salida de nuestra gran toma de tierra, viene a repartirse bajo la antena a todo lo largo de la capa elevada de la misma; hagamos cuenta ahora de las pérdidas que corresponden a este trayecto de las líneas de corriente.

62. *Resistencia del suelo bajo la capa elevada de la antena.*— Cuando la toma de tierra esté limitada a una pequeña distancia del pie de la antena, la corriente que parte de esta toma debe propagarse horizontalmente en el terreno situado debajo de la antena.

Circula así en un conductor de resistividad  $\rho$ , cuya altura vertical es igual a la penetración  $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}$  (si se supone  $\mu = 1$ ) y cuya anchura es seguramente mayor que la anchura misma que la capa de la antena  $l$ ; esta anchura puede ser estimada, por ejemplo, en la anchura  $l$  de la capa, más la altura de los postes  $h$ . En cuanto a la longitud eficaz de este conductor, no se debe tomar igual a la longitud  $L$  de la capa elevada de la antena porque la intensidad total de la corriente va disminuyendo a medida que se aleja del pie de aquélla. La corriente se va agotando progresivamente por las cantidades de electricidad que va dajando en la superficie del suelo debajo de la antena; se tendrá una aproximación tomando por ejemplo como longitud de este conductor la mitad  $\left(\frac{L}{2}\right)$  de la longitud de la antena.

La estimación de las pérdidas bajo la antena se reducen así al cálculo de la resistencia de un conductor de resistividad  $\rho$ , de longitud  $\frac{L}{2}$ , de anchura  $l + h$  y de espesor  $a$ , lo que da

$$R = \rho \frac{\frac{L}{2}}{(l+h)a} = \frac{L\sqrt{\pi\omega\rho}}{(l+h)\sqrt{2}}$$

Tomemos todavía como aplicación el caso de un terreno de resistividad 10.000 ohms-cm. ( $\rho = 10^{13}$  CGS, por encima del cual se emiten ondas de 15.000 metros ( $\omega = 1,2 \times 10^6$ ) con una antena

de 1.200 metros de longitud ( $L = 1,2 \times 10^5$ ) y 400 metros de anchura ( $a = 4 \cdot 10^4$ ), soportada por postes de 250 metros de altura (\*). La resistencia debida al paso de la corriente bajo la antena será del orden de magnitud de

$$R = \frac{1 \cdot 2 \cdot 10^5 \sqrt{3,14 \times 1,2 \cdot 10^5 10^{13}}}{(4 \cdot 10^4 + 2,5 \cdot 10^4) \sqrt{2}} \text{ C G S}$$

o sea, aproximadamente

$$R = 2,5 \text{ ohm}$$

y este valor será aumentado si la resistividad del terreno fuera de 50.000 ohms-cm.

De esta forma obtenemos así un valor aproximado del suplemento de resistencia por el deslizamiento de la corriente en el suelo debajo de la antena, y ello nos indica que para el establecimiento de una toma de tierra de una gran estación en un terreno medianamente conductor hay que hacer un gasto bastante importante.

La *metalización* del terreno debe ser casi completa en la estación misma y en su proximidad inmediata, y se extenderá muy lejos alrededor de la bajada de antena en una red tupida de conductores de cobre (\*\*) bastante gruesos, enterrados a suficiente profundidad para encontrar la capa de agua subterránea.

63. *Pérdidas en la parte superficial del terreno.*—Así como hemos dicho ya, la corriente en la tierra viene siempre a terminar en la superficie misma del suelo, para llevar allí las cargas alternativamente positivas y negativas que son atraídas por la influencia electrostática de las cargas de signo contrario llevadas a la antena. Para subir así hasta la superficie externa del terreno la corriente está obligada a atravesar la capa superficial del mismo, en general muy poco húmeda, y trepan después por la *vegetación* (*hierbas, arbustos, árboles*), que es la que recoge las líneas de fuerza que caen de la antena.

Se ha afirmado que la parte principal de las pérdidas en la tierra se encontraba localizada precisamente en esta terminación superficial de la corriente. No pensamos que sea así. Sin duda, la re-

(\*) El empleo de hilos de hierro debe evitarse en la construcción de las tomas de tierra porque su resistencia en alta frecuencia es muy elevada.

(\*\*) ( $h = 2,5 \cdot 10^4$ )

sistividad del medio en donde termina finalmente la corriente puede ser muy grande, pero también el trayecto final es muy corto; la corriente no tiene que recorrer más que algunos metros para subir del subsuelo conductor a la superficie, y para subir en este terreno, la corriente dispone de un conductor mediano, es verdad, pero de una sección considerable.

Volvamos a tomar el ejemplo numérico de una antena de 1.200 metros de longitud y 400 metros de ancho. Admitamos que toda la corriente debe subir hasta debajo de la antena en un conductor cuya sección sería así:

$$S = 1.200 \times 400 = 4,8 \cdot 10^9 \text{ C G S}$$

Admitamos todavía que tenga que franquear un espesor de 10 metros ( $l = 10^3 \text{ C G S}$ ) en un terreno mediano, al cual atribuiremos la resistividad considerable de *un megaohmio* ( $\rho = 10^{15} \text{ C G S}$ ). La resistencia correspondiente a esta subida de la corriente será

$$R = \rho \frac{l}{s} = 10^{15} \frac{10^3}{4,8 \cdot 10^9} \text{ C G S} = 0,2 \text{ ohm}$$

y esta resistencia, visiblemente calculada por exceso, queda muy débil ante las que hemos evaluado en los párrafos precedentes.

Observaremos, sin embargo, que el cálculo que acabamos de hacer es el relativo a una gran estación. Para una instalación en donde la antena tuviera dimensiones mucho más restringidas, la disipación de calor hacia la superficie podría ser más importante, porque la sección del conductor mediano sería más débil. Pero si se encontraba así en la necesidad de instalar una pequeña antena sobre un terreno muy malo, haría falta renunciar al empleo de tomas de tierra y se las deberá sustituir por una contraantena metálica colocada debajo de la antena y desbordándola, francamente, en todos sentidos.

## CAPITULO VIII

### Velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

64. *Propagación en un medio conductor.*—La transmisión a distancia de las ondas eléctricas no es nunca instantánea; las ondas

electromagnéticas se propagan con una velocidad finita, que depende de la naturaleza del medio.

La velocidad de propagación alcanza su valor máximo en el vacío; esta velocidad es la misma que la de la luz, de cuyas propiedades dedujo Maxwell que la luz puede considerarse como un fenómeno electromagnético. Su valor, independientemente de la longitud de onda, es igual a

$$c_1 = 2,9986 \times 10^{10} UEM = 299.860 \text{ km. por segundo.}$$

Si se estudia la propagación en el aire se observa que la velocidad disminuye; es en este medio igual a  $\frac{c_1}{1,0003}$ , 1,0003 es el índice de refracción del aire. En general, la relación de las velocidades  $C_1$  y  $C_2$  en dos medios de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  es

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Se admite, generalmente, como valor de velocidad de propagación el de 300.000 kms. por segundo, cifra que coincide con un error menor que una milésima con la obtenida experimentalmente.

Si se estudia la propagación de las ondas en la superficie de la Tierra, se observa una disminución de la velocidad de cerca de una centésima. El mismo fenómeno se produce cuando las ondas caminan a lo largo de una línea aérea.

Deduciremos más adelante que si la línea fuese de conductibilidad infinita, la velocidad de propagación sería  $c_1$ .

Estos hechos demuestran que la velocidad de propagación se reduce si hay pérdidas a lo largo del camino que recorre.

Así, en los cables submarinos, cuya capacidad y resistencia son grandes, no existe en realidad velocidad de propagación. Las ondas se deforman en su trayecto y avanzan lentamente, necesitando un segundo para atravesar el Atlántico, en lugar de 1/50 de segundo, que es el tiempo que invertiría si se propagasen con una velocidad igual a la  $c_1$  de Maxwell.

Para estudiar esta propagación vamos a efectuar una transformación en las ecuaciones diferenciales de Maxwell [8] y [9]. Para ello, tomemos el rot de los dos miembros de cada ecuación, y sustituyendo los valores de una por sus iguales de otra, tendremos



$$\left. \begin{aligned} \text{rot rot } \vec{H} &= -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} - \frac{k}{c^2} \mu \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2} & [60] \\ \text{rot rot } \vec{h} &= -\frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} - \frac{K}{c^2} \mu \frac{\delta^2 \vec{h}}{\delta t^2} & [61] \end{aligned} \right\} \text{y teniendo en cuenta el valor del laplaciano}$$

$\Delta_2 \vec{U} = \text{grad div } \vec{U} - \text{rot rot } \vec{U}$  y que las div de  $\vec{h}$  y  $\vec{H}$  son nulas, según el teorema de Laplace de campos newtonianos

$$\Delta_2 \vec{H} = -\text{rot rot } \vec{H} \quad [62] \quad \text{y} \quad \Delta_2 \vec{h} = -\text{rot rot } \vec{h} \quad [63]$$

sustituyendo y teniendo en cuenta que en este caso que estamos tratando de un medio conductor se podrían desprestigiar las corrientes de desplazamiento, obtenemos

$$\Delta_2 \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta \vec{H}}{\delta t} \quad [64] \quad \text{y} \quad \Delta_2 \vec{h} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta \vec{h}}{\delta t} \quad [65]$$

Estas ecuaciones vectoriales, como vemos, no contienen cada una más que un vector  $\vec{H}$  o  $\vec{h}$ , y teniendo en cuenta el valor del laplaciano

$$\left( \Delta_2 \vec{H} = \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta z^2} \right)$$

se pueden descomponer cada una en tres correspondientes a las tres coordenadas, y serán

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta^2 H_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 H_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 H_x}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta H_x}{\delta t} & \left| \quad \frac{\delta^2 h_x}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 h_x}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta h_x}{\delta t} \\ \frac{\delta^2 H_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 H_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 H_y}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta H_y}{\delta t} & \left| \quad \frac{\delta^2 h_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 h_y}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta h_y}{\delta t} \\ \frac{\delta^2 H_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 H_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 H_z}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta H_z}{\delta t} & \left| \quad \frac{\delta^2 h_z}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 h_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 h_z}{\delta z^2} &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \mu \frac{\delta h_z}{\delta t} \end{aligned} \right. \quad [66]$$

Estas ecuaciones son las mismas que las que rigen la distribución de las temperaturas en un cuerpo conductor del calor. Significan, por tanto, que la electricidad se propaga en los conductores por di-

fusión, como el calor. No existe, en un conductor, una velocidad definida para la propagación de la energía por radiación; como vamos a ver, ocurre en los cuerpos aisladores.

65. *Velocidad de propagación en un medio aislador.* — Cuando el medio es aislador, como el vacío, el aire, la conductibilidad  $\sigma$  es nula y las ecuaciones de Maxwell quedan reducidas a la [5] que vimos en el párrafo 23

$$\Delta_2 \vec{h} = \frac{K \mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{h}}{\delta t^2} \quad ,, \quad \Delta_2 \vec{H} = \frac{K \mu}{c^2} \frac{\delta^2 \vec{H}}{\delta t^2}$$

las cuales, según lo que se dijo en aquel párrafo, representan la propagación de los campos eléctrico y magnético a la velocidad

$$\frac{c}{\sqrt{K \mu}}$$

66. *Propagación a lo largo de hilos. Igualdad de velocidades.* — En una de sus primeras experiencias, Hertz ha demostrado que las ondas *hertzianas*, como se las ha llamado después, se propagan a lo largo de hilos conductores en los cuales son canalizadas como las ondas acústicas en los tubos sonoros. Observó también que los nodos y los vientres tenían sensiblemente la misma equidistancia en las experiencias de interferencias a lo largo de los hilos, y en las interferencias en el aire libre por reflexión en un espejo conductor.

Después de Hertz, Sarrazin y de la Rive han establecido con precisión esta constancia de la velocidad. En experiencias expresamente dedicadas a este fin (1892), han encontrado, por ejemplo, que un resonador de 75 centímetros de diámetro definía una longitud de onda de 299 centímetros en las interferencias a lo largo de hilos, y una longitud de 300 centímetros en las interferencias en el aire libre. Estas experiencias no definen cuál es la velocidad de propagación de las ondas hertzianas; demuestran solamente que la velocidad debe ser la misma en el aire libre que en los hilos conductores.

67. *Medida directa de la velocidad de las ondas a lo largo de hilos conductores. Experiencias de Mr. Blondlot.* — La medida directa de la velocidad de las ondas ha sido hecha en 1893 por Blondlot, el cual ha determinado el tiempo que tarda un tren de ondas en recorrer un trayecto de 1.800 metros de longitud sobre una línea telegráfica de doble hilo.

Blondlot producía una descarga brusca en una de las extremidades de la línea, definiendo el instante de esta descarga por la pro-

ducción de una pequeña chispa. La onda eléctrica se propagaba en seguida a lo largo de los hilos y, llegando a la extremidad de la línea, producía allí una segunda chispa. Los extremos de la línea estaban en el mismo local, y era entre los puntos de un mismo excitador en donde se producían las dos pequeñas chispas. Toda la medida se reducía entonces a determinar el intervalo de tiempo que pasaba entre las dos chispas consecutivas. Esta determinación se hacía, por un método de inscripción fotográfica, proyectando sobre una placa sensible las imágenes de las chispas producidas por reflexión en un espejo giratorio cuya velocidad de rotación se conocía.

El montaje general de la experiencia está representado en la figura 48. Una bobina de Rhumkorf carga dos pequeñas botellas de

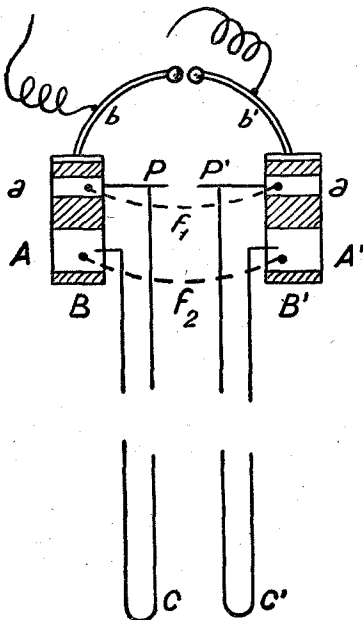


Fig. 48

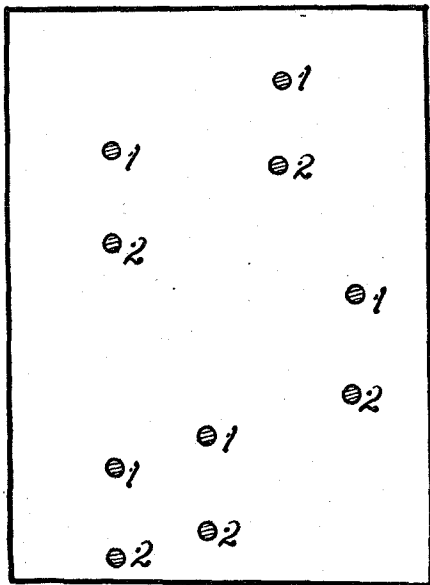


Fig. 49

Leyden montadas en serie. Sus armaduras interiores que comunican con los polos de la bobina de Rhumkorf, comunican también con las varillas de un excitador  $b b'$ . Las armaduras exteriores están divididas cada una en dos partes:  $a A$  y  $a' A'$ . Un excitador auxiliar formado de dos puntas  $P P'$ , está unido directamente a las armaduras  $a a'$ , y los dos hilos de línea parten de las otras armaduras  $A A'$ , para terminar en las dos puntas del excitador  $P P'$ . La carga lenta de los condensadores está asegurada por cuerdas mojadas muy re-

sistentes,  $f_1$  y  $f_2$ , que unen respectivamente las armaduras  $a a'$  y  $A A'$ ; pero estos medianos conductores cesan de intervenir en los fenómenos extremadamente rápidos que se producen cuando una chispa salta entre las varillas  $b b'$ . En el momento mismo en que se produce en  $b b'$  una descarga de las armaduras interiores, el condensador  $a a'$  se descarga también en el excitador  $p p'$ ; el instante en que se produce en  $p p'$  esta primera chispa, es también el instante en que la onda de descarga del otro condensador  $A A'$  parte de  $A$  y de  $A'$  para cerrar a lo largo de la línea y llegar en seguida al excitador  $p p'$ , en donde provoca la segunda chispa.

Se repite la experiencia un gran número de veces, y no queda entonces más que revelar la placa fotográfica y medir las distancias de las imágenes de cada uno de los pares de chispas que se han registrado allí.

Blondlot ha encontrado así como velocidad de propagación de las ondas a lo largo de los hilos:

$V = 298.000$  kms. por segundo, con una precisión aproximada de 1 por 100.

68. *Medida directa de la velocidad de las ondas radiotelegráficas en la superficie del Globo terrestre. Experiencias de Abraham, Dufour y Ferrie (1913).*—Estos autores han determinado la velocidad de las ondas en la superficie de la tierra por un método de medidas que reproduce el método clásico llamado de *golpes recíprocos*, empleado en las antiguas medidas de la velocidad del sonido en el aire.

Supongamos que en la primera estación  $A$ , provista de un emisor radiotelegráfico, se haya hecho en un cierto instante  $t_0$  una emisión constituida por un solo tren de ondas muy breves. Este tren de ondas se propaga, llega a la segunda estación,  $B$ , y supongamos que en el instante preciso de llegar a  $B$  la señal, esta segunda estación emite a su vez una señal semejante. El segundo tren de ondas, emitido por  $B$ , se dirige entonces hacia  $A$ , y cuando llega a esta estación, la hora marcada por el cronómetro no es ya  $t_0$ , sino una hora más avanzada,  $t_0 + t$ . Es natural que en estas condiciones este intervalo de tiempo debe representar la duración total del trayecto de ida y vuelta.

En la práctica, no es posible hacer coincidir en la estación  $B$  el instante de la emisión con el de la recepción. Pasan necesariamente algunos segundos entre estos dos instantes, pero no hay más que restar este retardo de la duración  $t$ , medida en la estación, para encontrar la duración del doble recorrido de las ondas.

Se ve que, en definitiva, la operación consiste en emitir señales alternativamente por *A* y por *B*, anotando con precisión en cada estación el instante de su emisión y el de su recepción. Las medidas se hacen recibiendo las ondas con un receptor de galena. Las corrientes del receptor son enviadas a un galvanómetro fotográfico, cuyos desplazamientos son registrados en una banda de papel sensible, que se desarrolla de una manera continua. En esta misma banda se registran también los segundos de un cronómetro astronómico, así como las vibraciones de un diapasón que sirven a fraccio-

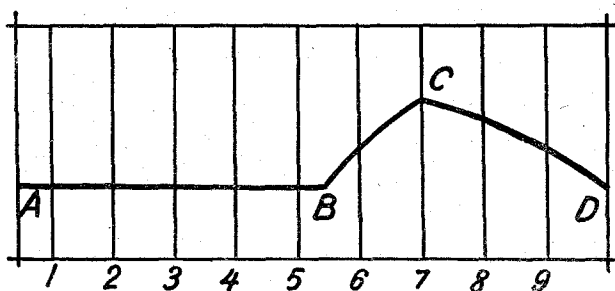


Fig. 50

nar finamente el segundo para poder hacer con precisión las medidas de tiempo que la banda fotografía. El trazado que se obtenía para la recepción de un tren de ondas que provenía de una chispa única era análogo al que indica la figura. Los rayos paralelos 1, 2, 3, ... son las fotografías instantáneas de una abertura fija sobre la cual el diapasón, provisto de un espejo, proyecta un resplandor luminoso en cada una de sus oscilaciones. La línea *A B C D* es la traza del haz luminoso reflejado por el espejo del galvanómetro que se desvía bruscamente en *B*, en el momento del paso de las ondas.

Tres series de medidas han sido hechas entre París y Tolón, París y Toul, París y Wáshington. La media de los valores obtenidos para la velocidad de las ondas era inferior en un 1 por 100, aproximadamente, al valor de la velocidad de la luz; pero la precisión de las experiencias no es suficiente para que se pueda responder absolutamente de esta diferencia.\*

Si experiencias ulteriores más precisas demostrasen que hay efectivamente una diferencia en el sentido indicado por nuestras primeras medidas, se podría sacar un argumento importante en favor de la hipótesis de *Eccles*, según la cual la energía radiada por la an-

tena de emisión no se desliza a lo largo de la superficie conductora del suelo, sino que sufre una especie de reflexión en las muy altas capas de la atmósfera que están fuertemente ionizadas e influyen igual que una masa conductora.

Las ondas tendrían entonces que recorrer un trayecto mayor que si se propagasen a lo largo de la superficie de la tierra, y su velocidad aparente podría resultar más débil que su velocidad real.

## CAPITULO IX

### Propagación de las oscilaciones eléctricas en las líneas aéreas y en los cables submarinos.

69. *Constantes de la línea.*—Consideremos un trozo de línea de longitud  $l$  y supongamos que esta longitud, siendo mucho más grande que la distancia de dos hilos, sea, sin embargo, mucho más pequeña que las longitudes de las ondas. Si admitiésemos que todo a lo largo de este fragmento de línea, la intensidad y la diferencia de potencial de los dos hilos, permanece constante, definiremos las constantes de la línea de la siguiente forma:

Por existir una corriente  $i$  habrá una localización de energía magnética, que tendrá por expresión:

$$W_m = l \cdot \frac{1}{2} L i^2$$

en la que  $L$  es lo que se llamará *autoinducción* por unidad de longitud de la línea (\*).

Por existir una diferencia de potencial habrá una localización de energía electrostática, que tendrá por valor:

$$W_e = l \cdot \frac{1}{2} C v^2$$

en la cual,  $C$  se llamará *capacidad por unidad de longitud*.

Hay, por último, en esta misma longitud una disipación de energía calorífica que para un tiempo  $t$  tiene por valor:

$$W_c = l \cdot R i^2 t$$

---

(\*) Se trata de la *longitud de la línea* y no de la longitud total de los hilos de ida y vuelta, la cual será doble de la longitud de la línea.

$R$  es la *resistencia por unidad de longitud de línea*, y esta cantidad representa la suma de las resistencias unitarias del hilo de ida y vuelta.

Cuando la línea está perfectamente aislada, las tres constantes  $L$ ,  $C$ ,  $R$  la definen completamente. Si el aislamiento no fuera absoluto, pasaría corriente de un hilo a otro, bajo la influencia de la diferencia de potencial  $v$ ; y para el elemento de longitud  $l$ , se podría representar la pérdida de energía por derivación:

$$W_d = (l \cdot s \cdot v)^2 \times \frac{1}{l \cdot s} = l \cdot s \cdot v^2$$

expresión en la cual,  $s$  sería la constante de fuga o perditancia por unidad de longitud de línea.

Para expresar el problema en ecuaciones, basta aplicar ahora a un elemento de línea las leyes generales de los circuitos eléctricos.

70. *Ecuaciones fundamentales.* — Consideremos primeramente las cantidades de electricidad que durante un tiempo  $dt$  entran en un elemento de línea de longitud  $dx$ , y las que salen de este elemento.

Por una extremidad entra  $i dt$ ; por la otra, sale  $\left(i - \frac{\delta i}{\delta x} dx\right) dt$ ; se pierde, pues, en total en el elemento la cantidad de electricidad  $\frac{\delta i}{\delta x} dx dt$ . Si suponemos la línea perfectamente aislada, esta cantidad de electricidad no puede provenir más que de la que ha quedado bajo forma electrostática, debido a la capacidad de la línea; es decir,  $C dx \frac{\delta v}{\delta t} dt$ . Igualando estos dos últimos valores, tendremos:

$$\frac{\delta i}{\delta x} dx dt = C dx \frac{\delta v}{\delta t} dt \quad \text{ó} \quad \frac{\delta i}{\delta x} = C \frac{\delta v}{\delta t} \quad [67]$$

que es la primera ecuación diferencial del problema.

Si el aislamiento de la línea fuera imperfecto sería preciso tener también en cuenta la cantidad de electricidad perdida por las fugas  $s v dx dt$ , y la ecuación [67] se convertirá en:

$$\frac{\delta i}{\delta x} = C \frac{\delta v}{\delta t} + s v \quad [68]$$

Apliquemos ahora la ley de Ohm al trozo de longitud  $dx$ , en el cual suponemos que el potencial varía  $\frac{\partial v}{\partial x} dx$ . Esta variación de potencial tiene que ser la suma de la f. e. m. de autoinducción y de la caída óhmica, o sea:

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx = L dx \frac{\partial i}{\partial t} + R dx i \quad \text{ó} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + R i \quad [69]$$

Eliminemos  $i$  entre las ecuaciones [68] y [69], para lo cual derivaremos la [69] con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} + R \frac{\partial i}{\partial x} \quad [70]$$

y la [68] con respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = C \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} + s \frac{\partial v}{\partial t} \quad [71]$$

Sustituyendo en la [70]  $\frac{\partial i}{\partial x}$  por su valor [68], tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} + LS \frac{\partial v}{\partial t} + RC \frac{\partial v}{\partial t} + RS v = LC \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} + \\ &+ (RC + LS) \frac{\partial v}{\partial t} + RS v \end{aligned} \quad [72]$$

que es una ecuación de sólo la función  $V$ , ligada con las variables  $x$  y  $t$ . Esta ecuación es la llamada de *los telegrafistas*. No nos ocuparemos más que del caso en que la línea está bien aislada. Haciendo entonces  $s = 0$  en esta ecuación, queda reducida a:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} + RC \frac{\partial v}{\partial t} \quad [73]$$

ecuación que vamos a estudiar en algunos casos particulares.

71. *Propagación de una onda sinusoidal a lo largo de una línea infinitamente larga.*—Supongamos que en el punto ( $x = 0$ ), en que comienza la línea, se mantiene una f. e. m. sinusoidal permanente

$$V_0 = A \text{ sen } \omega t$$



Es natural pensar que, esperando un tiempo suficiente, se encontrará necesariamente en la línea un estado de régimen, para el cual en cada punto de abscisa  $x$  las variaciones de potencial serán una función sinusoidal del tiempo, teniendo la misma pulsación  $\omega$  que en el punto de origen, no diferenciándose más que por la amplitud y las fases de las variaciones del potencial  $v_0$ , mantenidas en el origen.

Como cada una de las partes de la línea podría a su vez ser considerada como el origen de una línea indefinida, parece que la fase debe variar proporcionalmente a  $x$ , en tanto que la amplitud debe decrecer en progresión geométrica cuando la abscisa  $x$  aumenta progresión aritmética. Estos razonamientos indican que la solución de la ecuación [73] debe ser de la forma:

$$v = A e^{-\beta x} \text{sen } \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \quad [74]$$

expresión en la cual las constantes  $\beta$  y  $u$  deberán tener valores convenientemente elegidos.

Reemplazando este valor de  $V$  en la ecuación [73] se reconoce que tal función satisface, en efecto, a la ecuación, siempre que las cantidades  $\beta$  y  $u$  tengan los valores siguientes:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{\omega C}{2} [\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega L]} \\ u &= \sqrt{\frac{2 \omega}{C R^2} [\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega L]} \end{aligned} \quad [76]$$

suponiendo, naturalmente,  $s = 0$ . No nos detendremos a comprobar estos resultados, fáciles por otra parte de comprobar en el caso de antenas por las simplificaciones que allí se hacen.

La amplitud de las oscilaciones decrece, pues, a lo largo de la línea según el exponente  $e^{-\beta x}$  y en la estación receptora, después de un recorrido de longitud  $l$ , no queda ya más que la fracción  $e^{-\beta l}$  de la amplitud inicial.

Por el contrario, a todo lo largo de la línea la velocidad de propagación de las fases de las oscilaciones permanece constantemente igual a la cantidad  $u$ , toda vez que el paréntesis de [74] no se altera sustituyendo  $t$  por  $t + 1$  y  $x$  por  $x + u$ , o sea, que en 1" ha avanzado la fase  $u$ .

Como indican las fórmulas [74] y [76], el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  y la velocidad de propagación  $u$  no dependen solamente de las constantes de la línea, sino que dependen también de la frecuencia de las oscilaciones.

*Cables telegráficos submarinos. Transmisión de ondas sinusoidales muy lentas.*—Elegiremos, por ejemplo, el cable transatlántico de Brest a Nueva York, cuyas constantes son:

$$R = 0,91 \text{ ohm por kilómetro.}$$

$$C = 0,25 \mu F \text{ por kilómetro.}$$

$$L = 0,0007 H \text{ por kilómetro.}$$

Las corrientes telegráficas son lentas; su frecuencia es del orden de cinco períodos por segundo; podemos, pues, adoptar para la pulsación  $\omega$  un valor medio igual a  $2\pi \times 5 \approx 30$ . El término  $\omega L$  vale, pues,  $\omega L = 30 \times 7 \times 10^{-4} = 0,021$ , que como se ve es muy pequeño con respecto a  $R$ , que vale 0,91. Se puede, pues, en las expresiones de  $\beta$  y  $u$  no tener en cuenta los términos en  $\omega L$ , y escribir:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} \quad \text{y} \quad u = \sqrt{\frac{2\omega}{CR}} \quad [77]$$

Estas fórmulas sirven para todos los cables submarinos, porque la autoinducción de estos cables es siempre bastante débil para que se puedan despreciar los términos en  $\omega L$  ante los términos en  $R$ .

Para nuestro cable transatlántico, el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$  tiene como valor numérico:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}} = \sqrt{\frac{30 \times 0,25 \times 10^{-6} \times 0,91}{2}} = 0,002$$

No es, pues, más que al cabo de 500 kilómetros que el exponente  $\beta x$  del exponencial se hace igual a 1, y que la amplitud se encuentra reducida a la fracción  $\frac{1}{e} = \frac{1}{2,7}$  de la amplitud en la partida. Pero esta reducción se multiplica de 500 en 500 kilómetros, y no queda ya al otro lado del Océano más que corrientes muy débiles del orden del microamperio, para las cuales hacen falta aparatos receptores extremadamente sensibles.

La presencia del factor  $\omega$  en la expresión del coeficiente de amor-

tiguamiento  $\beta$  nos explica por qué se gana en sensibilidad cuando se transmite más lentamente. Se transmitiría más de prisa si se hubieran podido tomar valores más débiles para  $C$  y para  $R$ . Desgraciadamente, para disminuir la resistencia hubiera sido preciso emplear más cobre, y para disminuir la capacidad, aumentar las dimensiones transversales del cable para separar más los dos conductores, y se ha detenido en los valores que hemos indicado por no aumentar exageradamente el precio del cable.

El valor numérico de la velocidad de transmisión de las oscilaciones de pulsación  $\omega = 30$  está dado por la fórmula [77]:

$$u = \sqrt{\frac{2\omega}{CR}} = \sqrt{\frac{2 \times 30}{0,25 \times 10^{-6} \times 0,91}} = 17.000 \text{ kms. por segundo.}$$

Si se pudiera seguir con los ojos una de estas ondulaciones que recorren el cable con esta velocidad, se la vería, pues, atravesar el Océano en un tercio de segundo, en tanto que las señales radiotelegráficas, propagándose por el aire, tardarían 1/50 de segundo.

72. *Propagación a lo largo de líneas aéreas. Estudio de la intensidad.*—Los hilos de las líneas aéreas están más separados que las de los cables. Su capacidad es, pues, más débil, y las líneas aéreas pueden transmitir oscilaciones eléctricas más rápidas. Pero su autoinducción es también mayor que la de los cables debido a la mayor separación de los conductores; y en razón misma del aumento de rapidez de la emisión de señales, los términos de la autoinducción dejan de ser despreciables. La ecuación del problema debe, por consiguiente, conservarse bajo la forma general que hemos establecido:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = CL \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + CR \frac{\partial v}{\partial t}$$

Tomaremos aquí como ejemplo el caso de una línea telefónica interurbana de hilo de cobre de cinco milímetros de diámetro, que suponemos perfectamente aislada, y cuyas características son:

$$\begin{aligned} R &= 1,8 \text{ ohm por kilómetro.} \\ C &= 0,006 \mu F \text{ por kilómetro.} \\ L &= 0,0022 H \text{ por kilómetro.} \end{aligned}$$

El coeficiente de amortiguamiento de una serie de ondas entre-

tenidas de pulsación  $\omega$  y la velocidad de propagación de sus fases nos son siempre dados por las fórmulas generales:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega C}{2} [\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega L]} \quad [78]$$

$$U = \sqrt{\frac{2 \omega}{C R^2} [\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega L]} \quad [79]$$

1.º *Caso de corrientes telegráficas.*—Las corrientes muy lentas de la telegrafía ordinaria, para las cuales  $\omega L$  es todavía despreciable ante  $R$ , serían extremadamente poco atenuadas en su transmisión por dicha línea. Para ondas de unos cinco períodos por segundo ( $\omega = 30$ ), despreciando  $\omega L$  ante  $R$ , se encuentra, en efecto:

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega C R}{2}} = \sqrt{\frac{30 \times 0,006 \times 10^{-6} \times 1,8}{2}} = 0,0004 = \frac{1}{2.500}$$

por consiguiente, no es hasta los 2.500 kilómetros cuando la intensidad de estas corrientes telegráficas sería reducida en la fracción  $e^{-1} = \frac{1}{2,7}$  de la intensidad de partida.

2.º *Caso de corrientes telefónicas.*—Para las corrientes telefónicas, la frecuencia media es del orden de 800 períodos por segundo, y se puede tomar para  $\omega$  el valor 5.000. El término de autoinducción  $\omega L$  es entonces más grande que el término en  $R$ . Si nos contentamos con una expresión aproximada para el coeficiente de amortiguamiento  $\beta$ , se puede ésta escribir bajo la forma (\*):

$$\beta = \sqrt{\frac{C R^2}{4 L}} \left( 1 - \frac{R^2}{8 \omega^2 L^2} \right) \quad [80]$$

(\*) Se escribirá sucesivamente:

$$\begin{aligned} \beta &= \sqrt{\frac{\omega C}{2} [\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} - \omega L]} = \sqrt{\frac{\omega^2 C L}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}} - 1 \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2 C L}{2} \left[ \frac{R^2}{2 \omega^2 L^2} - \frac{R^4}{8 \omega^4 L^4} + \dots \right]} = \sqrt{\frac{C^2 R^2}{4 L} \left[ 1 - \frac{R^2}{4 \omega^2 L^2} + \dots \right]} = \\ &= \sqrt{\frac{C R^2}{4 L}} \left( 1 - \frac{R^2}{8 \omega^2 L^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

y se tendría de igual modo:

$$u = \frac{1}{\sqrt{C L}} \left( 1 - \frac{R^2}{8 \omega^2 L^2} \right) \quad [81]$$

Los términos de corrección  $\frac{R^2}{8 \omega^2 L^2}$  son pequeños ante la unidad. En nuestro ejemplo numérico valen, en efecto:

$$\frac{(1,8)^2}{8 \cdot (5000)^2 \cdot (0,0022)^2} = 0,003$$

Haciendo abstracción de esta última corrección podemos enunciar este resultado importante: *en una línea de esta clase, las corrientes telefónicas se propagan sin deformación*, puesto que la velocidad de las ondas y su amortiguamiento son independientes de la frecuencia.

El amortiguamiento  $\beta$  es, por otra parte, bastante débil en la línea considerada. Se tiene, en efecto:

$$\beta = \sqrt{\frac{C R^2}{4 L}} = \sqrt{\frac{0,006 \times 10^{-6} \times (1,8)^2}{4 \times 0,0022}} = \frac{1}{700}$$

de donde resulta que en una línea de 700 kilómetros, la intensidad a la llegada es todavía igual a la fracción  $e^{-1} = \frac{1}{2,7}$  de la intensidad a la partida, y la recepción sería todavía aceptable a una distancia doble o hasta triple.

Pero para llegar a este resultado nos ha hecho falta tomar una línea de hilo muy grueso (diámetro = 5 milímetros). Con diámetros más débiles no se puede telefonar más que con alcances más reducidos; la absorción de las ondas aumenta esta absorción, y la velocidad de transmisión empieza a depender de la frecuencia; a grandes distancias la distorsión y el debilitamiento de las señales hará imposible toda audición.

Un gran perfeccionamiento ha sido alcanzado por el *aumento artificial de la autoinducción de las líneas telefónicas*, cargando la línea con un cierto número de bobinas de autoinducción, regularmente espaciadas. Este perfeccionamiento ha sido debido, sobre todo, a los trabajos de M. Pupin, y las líneas así transformadas se llaman *pupinizadas*.

La expresión del coeficiente de amortiguamiento:

$$\beta = \sqrt{\frac{C R^2}{4 L}} \left( 1 - \frac{R^2}{8 \omega^2 L^2} \right)$$

enseña que  $\beta$  disminuye cuando  $L$  aumenta, y que si se quiere doblar el alcance, es decir, si se quiere hacer  $\beta$  dos veces más débil, basta cuadruplicar la autoinducción de la línea.

El efecto de la *pupinización* de la línea está limitado por la existencia de *fugas*, que hemos considerado como despreciables, y que acabarían, sin embargo, por absorber las ondas en las grandes distancias.

No podemos abandonar este tema sin añadir que, en estos últimos años, el empleo de los amplificadores de válvulas ha hecho dar a la telefonía un paso decisivo. Repartiendo algunos amplificadores a lo largo de la línea se puede aumentar prácticamente, sin límite, el alcance de las comunicaciones, y se realizan corrientemente alcances directos de 4.000 kilómetros.

73. *Propagación de las ondas de alta frecuencia a lo largo de una línea aérea.* — A medida que la frecuencia se eleva, el amortiguamiento y la velocidad se aproximan cada vez más a sus valores límites:

$$\beta = \sqrt{\frac{C R^2}{4 L}} \quad u = \frac{1}{\sqrt{C L}}$$

y se hacen también independientes de la frecuencia (\*).

Las ondas de alta frecuencia se propagan, pues, sin gran deformación a lo largo de las líneas aéreas, y su velocidad de propagación es igual a la velocidad límite:

$$u = \frac{1}{\sqrt{C L}}$$

(\*) En realidad, el amortiguamiento acaba por aumentar, proporcionalmente a la raíz cuadrada de la frecuencia, porque la resistencia  $R$  aumenta en esta misma proporción, debido a la localización superficial de las corrientes de alta frecuencia.

Esta velocidad es muy próxima a la de la luz (\*). Todavía no ha sido demostrada la igualdad exacta de las dos velocidades, y es esta *velocidad límite*  $u$  la que ha sido encontrada en las experiencias ya señaladas de Blondlot.

74. *Telefonía múltiple por hilos, con corrientes de alta frecuencia.*—El general Squier, del Ejército americano, ha utilizado estas propiedades de las líneas aéreas para establecer un nuevo sistema de telefonía múltiple por corrientes de alta frecuencia.

Este sistema, que el autor ha llamado Wire-Wireless (Radiotelegrafía por hilos), puede ser considerado como siendo la transformación en alta frecuencia de la *telegrafía armónica múltiple* de Mercadier.

En el telégrafo Mercadier, cada señal está formada por un tren de ondas sinusoidales de frecuencia musical. A la llegada, un receptor constituido por una lámina vibrante, en resonancia mecánica, sobre la misma frecuencia, recibe y aísla estas *corrientes vibratorias*, excepto las que pudieran llegar con una frecuencia diferente. Gracias a esta selección se pueden superponer, sobre una misma línea, una docena de transmisiones, caracterizadas cada una por la nota de la emisión musical correspondiente, sin que a la llegada la selección de frecuencias sufra ningún entorpecimiento.

En la telefonía armónica del general Squier, las emisiones se hacen en alta frecuencia, en longitudes de onda de algunos centenares de metros, y moduladas por el micrófono de la estación emisora, como si se tratase de una comunicación de radiotelefonía ordinaria, solamente en lugar de accionar una antena se acciona la línea aérea.

El aparato receptor es también idéntico al de un receptor de radio. Se le sintoniza a la longitud de onda elegida y recibe enton-

(\*) Para una línea de dos hilos colocados en el aire a una distancia  $d$  muy grande con relación a sus radios  $a_1$  y  $a_2$ , se tendrá en unidades C. G. S. electromagnéticas:

$$L = 2 \log \frac{d^2}{a_1 a_2} \quad \text{y} \quad C = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2 \log \frac{a^2}{a_1 a_2}}$$

de donde:

$$u = \frac{1}{\sqrt{CL}} = c = 3,10^{10} \text{ C. G. S.}$$

Para otro dieléctrico diferente del aire, la capacidad está multiplicada por el poder inductor específico  $K$  y la velocidad resulta dividida por esta cantidad.

ces la transmisión telefónica efectuada en esta longitud de onda, y no recibe ninguna de las emitidas simultáneamente con diferentes longitudes de onda.

La selección por circuitos oscilantes acordados es una operación muy sencilla y muy precisa. Por consiguiente, la telefonía harmónica por corrientes de alta frecuencia que acaba de implantarse se extiende de una manera insospechada para aumentar el rendimiento de las líneas de las redes telefónicas interurbanas. En España la tiene ya establecida la Compañía Telefónica Nacional.

## CAPITULO X

### Propagación en las antenas.

75. *Generalidades sobre la determinación del estado eléctrico de un conductor inicialmente en reposo y sometido en uno de sus puntos a una perturbación eléctrica.*—1. La velocidad de propagación en una perturbación a lo largo de una línea de doble hilo, de características  $R$ ,  $L$ ,  $C$  (resistencia, autoinducción y capacidad por unidad de longitud de dos conductores) es, cuando  $R$  es muy débil,

$$U = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

El producto  $L \cdot C$  no depende ni de las dimensiones de los hilos ni de su separación (como se verá al estudiar antenas), y es igual a  $K \mu$ , producto de la constante dieléctrica por la permeabilidad magnética. Se puede, pues, escribir  $U = \frac{1}{\sqrt{k \mu}}$ . Si la propagación se hace

en el vacío, la relación  $\frac{1}{\sqrt{k \mu}}$  es igual a  $3 \times 10^{10}$  cms., o sea, la velocidad de la luz.

Si en la ecuación fundamental de la propagación se hace  $R = 0$ , se obtiene en este caso límite:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = L C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = U^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad [82]$$

siendo

$$u = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

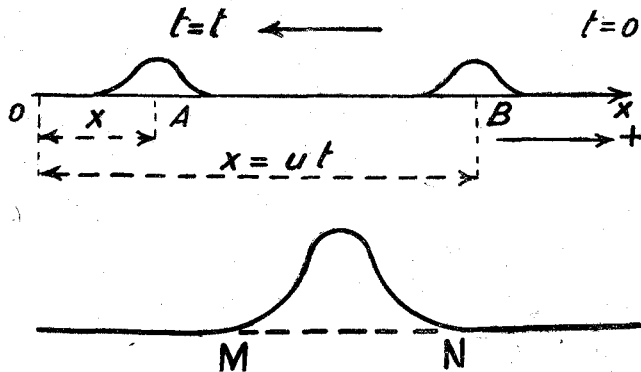


La solución general de esta ecuación ya vimos que era

$$V = f(x + ut) + \varphi(x - ut)$$

$f$  y  $\varphi$  designan dos funciones cuyos valores dependerán de las condiciones de cada caso particular. La primera de estas funciones  $f(x + ut)$  representa, en el momento  $t$ , un estado eléctrico del punto  $A$  de abscisa  $x$ , idéntico al estado eléctrico que en el tiempo  $t = 0$  tendría el punto  $B$  de abscisa  $x + ut$ , toda vez que en los puntos  $A$  y  $B$  e instantes  $t$  y  $0$ , los argumentos de la función  $f(x + ut)$  son iguales. Esta función representa, pues, la propagación de una onda hacia las  $x$  negativas. Se ve, igualmente, que la función  $\varphi(x - ut)$  representa la propagación de una onda con la velocidad  $u$ , pero hacia las  $x$  positivas.

Por consiguiente, la función  $V$ , potencial eléctrico de un punto del conductor bifilar, es la suma de dos funciones convenientemente elegidas en  $x + ut$  y  $x - ut$ . Lo mismo le ocurre a la función  $i$ , intensidad de la corriente en un punto del conductor bifilar, pues la ecuación general se obtendría de una manera similar eliminado  $V$  entre los fundamentales de la propagación. Generalizando, pues, podremos decir que el estado eléctrico variable en un punto de una línea, se traduciría físicamente por la superposición de una onda



Figs. 51 y 52

viniendo de la derecha y propagándose con la velocidad  $u$ , y otra viniendo de la izquierda y propagándose con la misma velocidad. Se realiza así la descomposición del estado eléctrico de una línea en uno cualquiera de sus puntos; estado que, en realidad, es una cosa úni-

ca, pero que puede ser considerada, desde el punto de vista matemático, como la suma algebraica de dos ondas, viniendo de izquierda y derecha, y produciendo en la línea verdaderas interferencias.

Esta demostración no está limitada al caso de una línea indefinida. Subsiste para una línea  $AB$  de longitud finita, y se ve que, hasta en este caso, se puede todavía considerar el estado de la línea como resultante de la superposición de dos trenes de ondas que penetran allí en sentido inverso por sus extremidades  $A$  y  $B$ .

2. En una línea inicialmente en reposo y atacada en  $MN$  por una acción local sufrirá una alteración el estado eléctrico entre estos dos puntos.

Los potenciales relativos de los puntos entre  $M$  y  $N$  darán lugar, por ejemplo, a una curva de una forma como la de la figura.

Si se abandona entonces la línea asimismo se tendrá propagación de una onda hacia la derecha y propagación de otra hacia la izquierda. La mitad de la joroba  $MN$  será considerada como viniendo de la derecha; la otra mitad como viniendo de la izquierda; las dos mitades se superponen para dar la curva  $MPN$ .

3. Tanto el estado de vibración de una cuerda vibrante como el de un conductor en el que se producen oscilaciones eléctricas, se rigen por la misma ecuación, pues la [82] del conductor es idéntica a la de las cuerdas vibrantes.

Pero en las cuerdas vibrantes no se ven las ondas que se propagan, sino un estado de régimen permanente, y ahora se trata de explicar cómo este estado aparente se compagina con las dos ondas que se propagan.

El ataque de una cuerda vibrante en  $B$  da un cierto estado inicial que se traduce por una joroba en  $B$ . Como acaba de verse, el estado

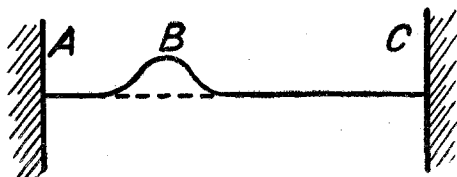


Fig. 53

posterior del hilo resultará de la superposición de los estados representados por dos ondas que se propagan una a la derecha y otra a la izquierda de  $B$ , pero en las extremidades de la cuerda, en  $A$  y  $C$ ,

la onda incidente no puede pasar, *se refleja*, y la superposición de la serie de ondas incidentes y reflejadas realizan el estado de régimen permanente final.

Estudiemos esta reflexión en las extremidades de la cuerda, cualquiera que sea el desplazamiento impuesto a un punto de una cuerda vibrante, el desplazamiento de su extremidad fija será siempre nulo. El desplazamiento  $y$  de un punto de la cuerda es una función  $f(x, t)$  de los parámetros  $x$  y  $t$ , tal que para  $x = 0$  y  $x = l$  se tiene  $f\left(\begin{smallmatrix} x=0 \\ x=l \end{smallmatrix}, t\right) = 0$  cualquiera que sea  $t$ .

En el caso concreto de una antena,  $y$  representará, ya una diferencia de potencial, ya una intensidad de corriente; en todos los casos, uno u otro de los factores que determinan el estado eléctrico de la antena.

Esta función  $y$  es, como se ha visto, de la forma

$$y = f(x + ut) + \varphi(x - ut)$$

Supongamos que para  $x = 0$  se tenga cualquiera que sea  $t$ ,  $y = 0$ . Esta condición se expresa por

$$f(ut) + \varphi(-ut) = 0 \quad \text{ó} \quad f(ut) = -\varphi(-ut)$$

Si la curva  $(c)$  representa en el instante  $t = 0$ , la función  $f(x)$ , la otra función,  $\varphi(x)$  estará representada por una curva  $(c')$  simétrica de  $(c)$  con relación al origen de coordenadas. Por consiguiente,

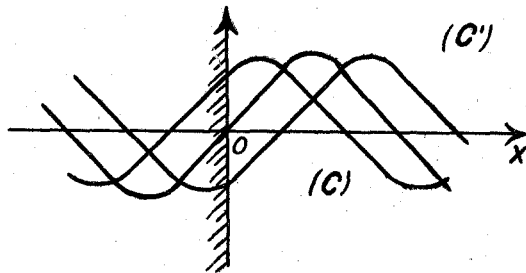


Fig. 54

la onda figurada por  $c$  se propagará hacia las  $x$  negativas, puesto que representa la función  $f$ , que ya dijimos se propagaba en ese sentido,

en tanto que la representada por la curva  $c'$  representación de la  $\varphi$ , se propagará hacia las  $x$  positivas, o sea, en la dirección contraria a la anterior; pero siempre se tendrá en el punto de origen interferencia completa, porque, debido a la igualdad de las velocidades, las ordenadas de las dos curvas permanecen constantemente iguales y de signos contrarios.

4. En el caso que precede, se han supuesto fijas las extremidades sobre las cuales se verifican reflexiones; otro caso que hay que tratar es el de la *reflexión en extremidades libres* no sujetas como anteriormente. Este caso se presenta en acústica en el estudio de los tubos sonoros abiertos; la condición límite impuesta entonces es que a pesar de la vibración de las moléculas de aire en la superficie límite y en sus alrededores la presión en el contacto con el aire libre es cero. Un caso análogo es el de un conductor eléctrico que tuviera una gruesa capacidad terminal en una de sus extremidades. No habría en tal punto variación sensible de potencial (\*). Si es la tierra la que hace oficio de capacidad terminal, se admite que su potencial es constante, y se toma este potencial como el cero de los potenciales. Observemos que es igualmente posible tener un potencial constantemente nulo en las extremidades de una línea bifilar cortocircuitando los dos hilos de la línea en dicha extremidad. El estudio algebraico se hace, pues, como para las cuerdas vibrantes; bien entendido que la función que es nula en la extremidad es el potencial de la línea.

Si nos ocupamos ahora de un hilo cuya extremidad es simplemente el hilo cortado, observaremos que en esta extremidad puede haber una diferencia de potencial variable, pero la *intensidad de la corriente será siempre nula*. La corriente de conducción que recorre la línea es debida, en efecto, al movimiento de electricidad necesario para la carga del condensador formado por los dos hilos de la línea (o por el hilo de línea y tierra en el caso de una línea de un solo hilo). Como más allá de la extremidad libre no hay capacidad alguna que cargar, el movimiento de electricidad se detiene y la corriente eléctrica es allí nula en todo momento. Se trata, pues, este caso como el de las cuerdas vibrantes, considerando la intensidad de la corriente y escribiendo que su valor permanece constantemente nulo en la extremidad de la línea.

---

(\*) Pues según la fórmula  $Q = C V$ , si  $C$  es muy grande se necesitarían variaciones muy grandes de  $Q$  para que fuese apreciable la de  $V$ .

5. Las ecuaciones de propagación (escritas suponiendo que se trata de una vibración de alta frecuencia, y que, además, no hay pérdidas y que la resistencia es débil) :

$$\frac{\delta i}{\delta x} = - C \frac{\delta v}{\delta t}$$

$$\frac{\delta v}{\delta x} = - L \frac{\delta i}{\delta t}$$

muestran que si se elige  $V$  como variable, cualquier condición impuesta a  $i$  se traducirá por una condición que deberá satisfacer  $v$ . En el caso, por ejemplo, en que una extremidad de la línea  $i$  es constantemente nula,  $\frac{\delta v}{\delta x} = 0$ . Esto no quiere decir que  $v$  es invariable, sino que, si en un instante  $t$  se traza la curva representativa de los valores de  $v$  en función de  $x$ , esta curva presenta un máximo o un mínimo en esta extremidad de la línea;  $v$  continúa siendo la suma de dos funciones, representando: una, la que viene de la derecha, y la otra, la de la izquierda; pero las dos tienen el mismo signo y se añaden en lugar de destruirse. *La onda de tensión se refleja en una extremidad abierta sin cambiar de signo.*

76. *Régimen permanente de las líneas vibrantes.*—Si se dispone en una de las extremidades de una línea de doble hilo, o en la base de una antena de un manantial de corriente periódica, se establece al cabo de un cierto tiempo en esta antena un régimen vibratorio permanente y periódico.

Para una abscisa  $x$  cualquiera, la diferencia de potencial entre los dos hilos de línea (o entre la antena y tierra) resulta ser una función periódica del tiempo. Esta función periódica será, por consiguiente, una función sinusoidal simple o con su gama de armónicos.

Pondremos por ejemplo:  $v = A \text{ sen } (\omega t + \varphi)$ ; la amplitud  $A$  y la fase  $\varphi$ , variando de un punto a otro, resultan ser funciones de  $x$ . La función debe verificar a la ecuación general:

$$u^2 \frac{\delta^2 v}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 v}{\delta t^2} = 0$$

La expresión del potencial  $v$  debe ser de la forma  $f(x + ut) + \varphi(x - ut)$ . Se puede imaginar una onda sinusoidal que viene de la derecha cuyo parámetro fuese  $\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$ , y una onda viniendo

de la izquierda cuyo parámetro fuese  $\omega \left( t + \frac{x}{u} \right)$ , toda vez que los nuevos parámetros de las funciones son los mismos que los de las anteriores, divididos por una cantidad constante  $u$  para que expresen tiempos en vez de espacios. Haciendo esto, las funciones se podrán poner bajo la forma:

$$f(x + ut) = a \operatorname{sen} \left[ \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \alpha \right]$$

$$\varphi(x - ut) = b \operatorname{sen} \left[ \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \beta \right]$$

$a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son cantidades que no dependen de  $x$ , y cuyos valores se determinan por las condiciones en las extremidades. Podemos suponer, por ejemplo, que en el origen, es decir, para  $x = 0$ , la suma de funciones  $f$  y  $\varphi$  es nula. Esta condición se traduce por  $a = b$  y  $\alpha = \beta$ ; siendo  $\alpha$  completamente arbitrario y no dependiendo más que del origen del tiempo, podemos tomarlo igual a cero. El estado oscilatorio de la línea o de la antena, que resulta de la superposición de dos perturbaciones  $f$  y  $\varphi$ , se escribe:

$$a \left[ \operatorname{sen} \omega \left( t + \frac{x}{u} \right) - \operatorname{sen} \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \right] = 2a \operatorname{sen} \frac{\omega x}{u} \cos \omega t$$

La función  $v$  se expresa, pues, por  $V = A \operatorname{sen} \frac{\omega x}{u} \cos \omega t$ . Ahora bien:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , siendo  $T$  el período de las oscilaciones, pero  $\lambda = uT$ ; por consiguiente,  $\frac{\omega}{u} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ; finalmente resulta:

$$v = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad [84]$$

Si hay una extremidad libre,  $\frac{\delta v}{\delta x}$  es nulo en esta extremidad, y, por tanto,  $v$  máximo; ahora bien: para que  $v$  sea máximo, es preciso que:

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} = 1 \text{ ó } \frac{2\pi x}{\lambda} = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

y llamando  $l$  a la longitud de la línea o antena:

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

o

$$l = \frac{\lambda}{4} + k \frac{\lambda}{2}$$

Si  $K = 0$ , se tiene  $l = \frac{\lambda}{4}$ ; la antena se dice que vibra en cuarto de onda.

Se dice todavía que, si para una frecuencia determinada correspondiente a una longitud de onda  $\lambda = uT$  la antena tiene una longitud  $l$  tal que  $l = \frac{\lambda}{4}$ , esta antena está en resonancia para esta frecuencia. Si  $l = \frac{3\lambda}{4}$  ( $K = 1$ ) se dice que la antena vibra según el armónico 3, y en este caso un punto notable es el punto  $x = \frac{\lambda}{2}$  para el cual el potencial no varía, toda vez que el  $\text{sen } \frac{2\pi x}{\lambda}$  será constantemente cero.

Es un hecho análogo al que se produce en los *nodos* y *vientres* de los tubos sonoros. En la extremidad abierta de la antena se tiene un *ventre de potencial* y un *nodo de corriente*, de igual manera que hay un vientre de desplazamiento y un nodo de presión en la extremidad abierta de un tubo sonoro. Si en el punto  $x = \frac{\lambda}{2}$  se pusiera a tierra una antena, no habría ningún cambio en la distribución de potencial en esta antena entre este punto y el alternador colocado en la base de la antena, pero bien entendido que las oscilaciones se detendrían en dicho punto.

Si se entretienen las oscilaciones de una antena con un alternador que da una corriente de período  $T$ , y si la antena tiene una longitud  $l = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} uT$ , la antena vibrará en su fundamental.

Resulta de lo que precede que, con un alternador dado, no vibrará la antena más que en determinadas formas: fundamental y armónicas. Ahora bien: la experiencia demuestra que es posible, siem-

pre, hacer vibrar una antena dada con una frecuencia cualquiera de vibración, observación absolutamente análoga a la que consistiría en decir que una cuerda de violín, dando el mi natural, por ejemplo, puede vibrar con una frecuencia diferente; basta para llegar a ello coger con la mano esta cuerda en uno cualquiera de sus puntos, separarla de su posición de equilibrio, después llevarla a cero, separarla de nuevo y así sucesivamente, con la frecuencia que se quiera.

Sin embargo, nuestro cálculo parecía indicar que una antena, excitada en la base por un alternador y teniendo una extremidad abierta, debía *necesariamente* vibrar en cuarto de onda, o en uno de sus armónicos. Este resultado extraño proviene de que, en la teoría de las vibraciones posibles de la antena, *no se ha tenido en cuenta el al-*

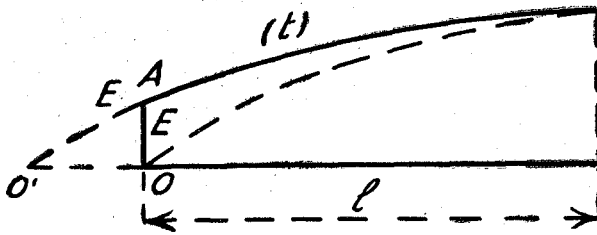


Fig. 55

*ternador*; ahora bien: sin alternador no hay vibración. El alternador tiene un efecto dependiente del lugar donde se encuentra, y este efecto es crear en este lugar una discontinuidad. Si está colocado en la base de la antena, ésta no está directamente a tierra, y en el origen no es ya  $v = 0$ , sino  $v = E \cos \omega t$ . La expresión general de  $v$  se escribe entonces:

$$v = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi \right) \cos \omega t \text{ con } A \operatorname{sen} \varphi = E$$

El cero de la senoide de las tensiones no es ya el punto  $x = 0$ , sino el punto  $x = -\frac{\lambda \varphi}{2\pi}$ .

Si la frecuencia de las oscilaciones engendradas por el alternador es más débil que la correspondiente a la longitud de onda propia de la antena, la curva de las tensiones tiene el aspecto de la curva (t) y  $\frac{\lambda}{4} > l$ ; la longitud de la onda de la emisión es superior a la longitud de la onda fundamental. Si  $E$  es fijo, pero se dispone de la



frecuencia del alternador, es ventajoso aumentar ésta para aumentar la amplitud de la tensión en la extremidad libre; la curva sinusoidal ( $t$ ) continuará, en efecto, pasando por  $A$ , pero su cero  $O'$  estará tanto más próximo de  $O$  cuanto que la frecuencia sea más grande. Se ve que, teóricamente, se tendría una amplitud de tensión infinita cuando el período de vibración fundamental de la antena estuviese acordado con el período del alternador.

Prácticamente no pasa esto; pues es preciso en la realidad hacer entrar en juego elementos que hasta ahora hemos despreciado: pérdidas por efecto Joule, por radiación, impedancia del alternador, etcétera...

77. *Discontinuidades de las antenas.*—Las discontinuidades de las antenas se traducen por discontinuidades en los valores de las constantes características  $C$  y  $L$ , o de los parámetros de estado eléctrico del conductor, potencial e intensidad.

Por ejemplo: en el punto de unión de la bajada de antena hay discontinuidad de las dos constantes  $C$  y  $L$ . Si se intercala un condensador en una antena hay discontinuidad del potencial, que varía bruscamente, aumentando en toda la diferencia de potencial que existe entre las armaduras del condensador.

Imaginémonos una antena unida a un suelo infinitamente conductor e interrumpido por un condensador. Se tendrá una discontinuidad en el paso del condensador. (El mismo caso se presentaría

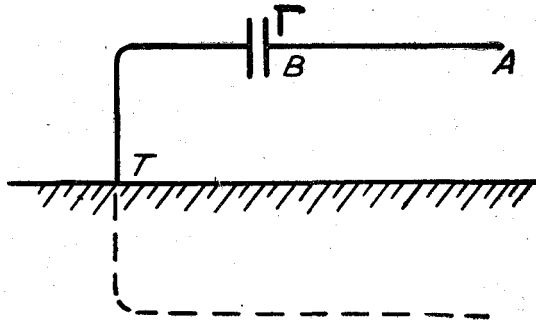


Fig. 56

si en lugar de interrumpir la antena por un condensador se la hubiera interrumpido por una autoinducción.) Supondremos, por otra parte, para mayor generalidad, que la autoinducción y la capacidad por unidad de longitud son diferentes, según se consideran éstas

constantes sobre el trozo  $AB$  o sobre el trozo  $BT$ . En el trozo  $AB$ , de longitud  $l$ , estas constantes serán  $L$  y  $C$ ; en el trozo  $BT$ , de longitud  $l_1$ , dichas constantes son  $L_1$  y  $C_1$ . En total: suponemos realizadas a la vez las dos clases de discontinuidades.

1.º Variación brusca de  $L$  y  $C$ .

2.º Presencia de un condensador de capacidad  $\Gamma$  (o de una autoinducción  $\Omega$ ).

Tomemos como origen de las longitudes la extremidad libre  $A$  de la antena.

Suponiendo el suelo infinitamente conductor podemos, como ya demostraremos más adelante, reemplazar la antena por una línea de dos hilos, formada por la antena y por su simétrica con relación al suelo. Designaremos entonces por  $i$  la intensidad de la corriente y por  $v$  la diferencia de potencial entre los dos hilos.

Entre  $A$  y  $B$ ,  $i$  estará definido, en función de  $x$  y de  $t$ , por:

$$i = I \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda} \operatorname{sen} \omega t \quad [85]$$

toda vez que aplicando la ecuación fundamental:

$$\frac{\delta i}{\delta x} = -C \frac{\delta v}{\delta t}$$

resulta para

$$v = \frac{-I}{\omega C} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad [86]$$

valor de la misma forma que el encontrado para  $v$  cuando se tomaba la extremidad libre como origen de las  $x$ . Entre  $B$  y  $T$  se tendrá para  $i$  una expresión semejante, pero la amplitud será diferente; sea  $J$  esta amplitud. Podemos escribir:

$$i = J \cos \frac{2\pi}{\lambda} (l + l_1 - x) \operatorname{sen} \omega t \quad [87]$$

En efecto: el último factor tiene que seguir siendo  $\operatorname{sen} \omega t$ , porque de un lado y otro del corte  $\Gamma$ , en el mismo instante  $t$ , la corriente  $i$  debe conservar la misma intensidad. Por otra parte, para  $x = l + l_1$ , la intensidad debe ser máxima en todos los momentos, lo

que exige que sea cos de cero, que es 1; y, por último, la expresión debe contener respecto a  $x$  el término  $\frac{2\pi x}{\lambda}$ .

Pasado el corte  $\Gamma$ , la diferencia de potencial  $v$ , deducida de la relación  $\frac{\delta i}{\delta x} = -C \frac{\delta v}{\delta t}$ , se escribe:

$$-C_1 \frac{\delta v}{\delta t} = -J \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (l + l_1 - x) \operatorname{sen} \omega t \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{ó}$$

$$d v = \frac{J}{C_1} \frac{2\pi}{\lambda} (l + l_1 - x) \operatorname{sen} \omega t d t$$

integrando

$$v = -\frac{J}{C_1 \omega} \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (l + l_1 - x) \cos \omega t \quad [88]$$

Veamos lo que pasa en el corte:

En primer lugar es preciso para la continuidad de la intensidad de la corriente que dicha intensidad sea igual en todo momento, lo mismo que se emplea para determinar su valor la fórmula [85] que la [87]; haciendo en las dos  $x = l$  y prescindiendo del factor en  $t$ , puesto que  $i$  debe ser igual en todos instantes, tendremos como primera condición:

$$I \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} = J \cos \frac{2\pi l_1}{\lambda} \quad [89]$$

En segundo lugar, al atravesar el corte se presenta una variación de la diferencia de potencial  $v$ . Como hemos asociado a la antena su imagen con relación al suelo, la diferencia de potencial entre el hilo de antena y su imagen es doble de la diferencia de potencial  $v'$  entre el hilo de antena y el suelo:  $v = 2 v'$ . El paso del condensador debe, pues, producir una variación brusca del potencial entre los *dos hilos* igual a  $2 e$ , siendo  $e$  la diferencia de potencial entre las dos armaduras del condensador.

La corriente de carga del condensador  $\Gamma \frac{d e}{d t}$  se obtiene haciendo  $x = l$  en una u otra de las expresiones de  $i$  anteriormente establecidas; por ejemplo:

$$i = I \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} \operatorname{sen} \omega t$$

de donde

$$d e = \frac{l}{\Gamma} \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} \operatorname{sen} \omega t dt \quad \text{ó} \quad e = -\frac{l}{\omega T} \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \omega t \quad [90]$$

La variación  $2e$  de potencial entre los hilos se expresará por:

$$\begin{aligned} \frac{I}{\omega C} \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \omega t - \frac{J}{\omega C_1} \frac{2\pi}{\lambda} \operatorname{sen} \frac{2\pi l_1}{\lambda} \cos \omega t = \\ = -\frac{2I}{\omega T} \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} \cos \omega t \end{aligned} \quad [91]$$

que traduce

$$(v_{AB})_{x=l} - (v_{BT})_{x=l} = 2e$$

simplificando resulta:

$$I \cos \frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{\lambda C}{\pi T} I \operatorname{sen} \frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{C}{C_1} J \operatorname{sen} 2\pi \frac{l_1}{\lambda} \quad [92]$$

Las relaciones [89] y [92] permiten determinar: por un lado, la relación  $\frac{J}{I}$  de las amplitudes en los brazos  $BT$  y  $AT$ ; y por otro lado, la longitud de onda  $\lambda$ , de manera que se tenga efectivamente un vientre de potencial en la extremidad libre y un nodo de potencial en la extremidad unida al suelo. La expresión en  $\lambda$  se obtendrá dividiendo [92] por [89]:

$$\frac{C}{C_1} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_1}{\lambda} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda}} + \frac{\lambda C}{\pi T} \quad [93]$$

De esta ecuación se puede deducir el valor de la longitud propia de una antena cuando se ha colocado en ella un condensador a una distancia determinada de la extremidad libre, o cuando, por ejemplo, se ha intercalado una autoinducción  $L$  en la base de la antena;

los resultados en este último caso son los mismos que precedentemente; basta reemplazar en los cálculos  $\Gamma$  por  $\frac{1}{\omega^2 L}$ .

Si a un lado y otro del condensador  $\Gamma$  no hay discontinuidad de  $C$  y de  $L$ , se pondría  $\frac{C}{C_1} = 1$ .

Podemos ahora proceder a una comprobación de nuestro cálculo, volviendo al caso normal de una antena sencilla unida al suelo por una de sus extremidades sin ninguna discontinuidad. Basta hacer  $C = C_1$  y  $\Gamma$  infinito. La ecuación [93] se convierte en:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} \times \operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda} &= 1 \quad \text{ó} \quad \operatorname{tg} \frac{2\pi l_1}{\lambda} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{2\pi l}{\lambda}} = \\ &= \cot \frac{2\pi l}{\lambda} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi l}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

de donde

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi l_1}{\lambda}$$

y por último

$$\frac{2\pi l}{\lambda} + \frac{2\pi l_1}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad [94]$$

lo que obliga a que

$$l + l_1 = \frac{\lambda}{4} \quad [95]$$

la antena vibra en cuarto de onda, como tenía que suceder.

En el caso de que la antena no presentase ni autoinducción, ni capacidad suplementaria, sino una bifurcación tal que después de ella la capacidad  $C$  se convierte en  $C_1$ , y la autoinducción  $L$  en  $L_1$ , como las cantidades  $C$ ,  $L$ ,  $C_1$ ,  $L_1$  están unidas sensiblemente por la relación  $\frac{1}{\sqrt{CL}} = \frac{1}{\sqrt{C_1 L_1}}$  que expresa la constancia de la velocidad de propagación sobre la línea (velocidad de la luz), la relación [93] se convierte en:

$$\operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_1}{\lambda} \cdot \frac{C}{C_1} = 1$$

$C$  representará, por ejemplo, la capacidad de la antena propiamente dicha;  $C_1$  la de la bajada de antena. Si  $\frac{C}{C_1} = N$ , siendo  $N$  un número cualquiera,  $\lambda$  se calculará para una antena bifurcada por:

$$N \operatorname{tg} 2\pi \frac{l}{\lambda} \operatorname{tg} 2\pi \frac{l_1}{\lambda} \quad [96]$$

Esta ecuación no es siempre aplicable a las antenas reales. Será cierta cuando teniendo una línea de doble hilo, o una línea de un hilo y su imagen con relación al suelo perfectamente conductor, o una antena e igualmente su imagen con respecto al suelo perfectamente conductor, la distancia entre los dos hilos, es decir, para nosotros entre la antena y su imagen, es pequeña con relación a  $\lambda$ ; o en el caso particular de la antena con relación a la longitud de la antena. En efecto: si la distancia entre los hilos no es pequeña,  $C$  no tienen apenas sentido. La fórmula [96] parece, pues, no aplicarse con bastante exactitud más que a las antenas bajas. Un ejemplo nos va a dar el orden del error cometido, aplicando la ecuación [96] a una antena normal:

Tomemos una antena de paraguas compuesta de seis ramas de 28 metros, cuyo vértice está a 25 metros por encima del suelo y cuya bajada de antena tiene una longitud de 35 metros. Se concibe que en tal ejemplo la capacidad de cada rama de antena respecto al suelo sea bastante mal definida, puesto que cada rama está inclinada respecto del suelo. Sin embargo, si se representa por  $C$  la capacidad con relación al suelo de la unidad de longitud del conjunto de hilos bifurcados del paraguas de la antena y por  $C_1$  la magnitud análoga de la bajada de antena, se podría poner:

$$N = \frac{C}{C_1} = 6$$

Reemplazando en [96]  $N$  por 6, podremos calcular  $\lambda$ . Pero hagamos lo inverso: se sabe que una antena, constituida como acaba de decirse, tiene una longitud de onda propia de 485 metros. Si en la ecuación [96] se da a  $\lambda$  este valor y se pone  $N$  como incógnita, se encuentra que  $N = 5,5$ . Como se ve no resulta exacto, sino aproximado.

En el caso de una antena horizontal, el valor de  $N$  puede hacerse igual a 2.

Para  $l_1 = \frac{1}{5} l$  se encuentra, aplicando [30],  $\lambda = \frac{14}{3} (l + l_1)$ , y no  $4 (l + l_1)$ .

Ahora bien: la experiencia da para  $\lambda$  un valor aproximado a  $5 (l + l_1)$ .

Podemos resumir diciendo que la fórmula [96], que tiene una pequeña base teórica, puede servir de tipo de fórmula empírica, con-

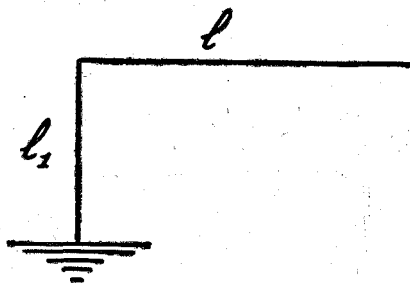


Fig. 57

duciendo a cálculos muy sencillos y pudiendo dar un primer valor bastante aproximado para el cálculo de las longitudes de ondas propias de las antenas.

*Antena Beverage.*—Se reciben habitualmente las ondas electromagnéticas en antenas o cuadros; los circuitos receptores están interpuestos entre la antena y la tierra.

Se emplea en las grandes estaciones receptoras una antena baja y muy larga. Por ejemplo: la Radio-Corporation of America utiliza en *Riverhead* (Long Island) una antena de 14 kilómetros de longitud, constituida por dos hilos de cobre colocados sobre una línea de postes. Esta línea está unida a tierra por las dos extremidades; el receptor está en una de las extremidades; en la otra extremidad la unión a tierra se hace a través de una resistencia sin autoinducción de unos 300 ohmios.

Esta antena posee propiedades directivas muy acentuadas; y contrariamente a las antenas ordinarias, que reciben con el máximo de intensidad las ondas que vienen en la dirección de la flecha, la antena Beverage recibe principalmente las que vienen del lado opuesto. Estas propiedades unidireccionales pueden estar representadas por la curva de las intensidades de corriente en la recepción para emisiones equivalentes en los diversos azimutes.

Para las recepciones de las ondas que provienen de la dirección

del codo de la antena y de las direcciones oblicuas se encuentran máximos secundarios muy pequeños respecto de las intensidades recibidas en la dirección de la antena.

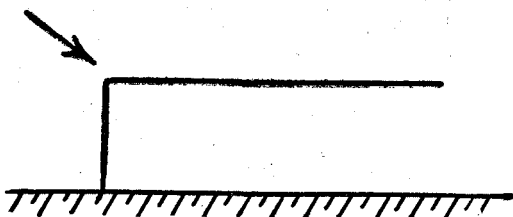
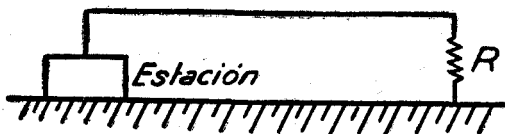


Fig. 58

Un análisis de los fenómenos relativos a esta antena permite darse cuenta del mecanismo de la recepción.

En el momento  $t$ , en el elemento  $ab$  de la antena, nace una f. e. m. que proviene de la transmisión. Haciendo abstracción de la f. e. m.

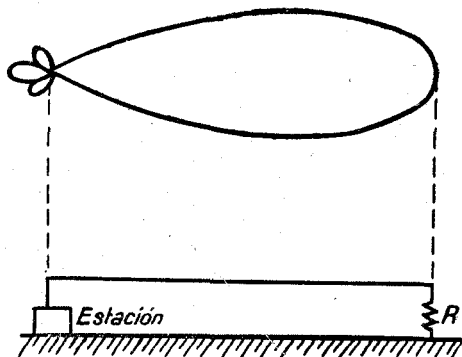


Fig. 59

que nace en los otros elementos de la antena,  $ab$  es un manantial de f. e. m. alternativa. Se debe, evidentemente, considerar la acción de conjunto de todas las partes de la antena; pero se ven las cosas



más claramente examinando primero el efecto de uno de estos elementos  $a b$  e integrando a continuación los resultados obtenidos por este elemento.

Tratando el problema de esta manera,  $a b$  obra como un pequeño alternador. En el momento en que la acción de  $a b$  empieza, si se lleva en ordenadas las diferencias de potencial entre la antena y el

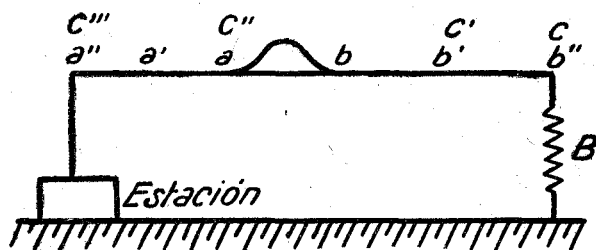


Fig. 60

suelo, se forma en  $a b$  una pequeña *joroba*. Parte entonces de  $a b$ :

- 1.º Una onda que se propaga a  $a'$  y  $a''$  y llega al receptor.
- 2.º Al mismo tiempo, una onda va hacia la derecha a  $b'$  y  $b''$  y hasta la extremidad.

Si  $B$  estuviera aislada, la onda de dicho punto se reflejaría sin cambio de signo para la diferencia de potencial (y con cambio para la intensidad de corriente). Una onda reflejada volvería, pues, hacia el manantial en  $c$ ,  $c'$ ,  $c''$ ,  $c'''$ .

Así, después de la acción de la onda  $a''$ , se tendría otra acción producida por  $c''$ . Se producirán, pues, en el receptor una serie de acciones a intervalos iguales a la duración de propagación.

Habría concordancia de acciones en el receptor si la antena vibrase en cuarto de onda; se establecería entonces un sistema de ondas estacionarias para  $\lambda = 4 l$ ; es el modo ordinario de recepción con una onda acordada.

Pero en el caso de la antena de Beverage, los fenómenos son diferentes. La antena está unida a tierra en la extremidad  $B$ ; la reflexión de las ondas está *suprimida* en esta extremidad porque la impedancia de la toma de tierra está elegida de manera que sea equivalente a la de una línea infinitamente larga, que sería la prolongación de la antena. Las ondas  $a$  que vienen del manantial llegan a  $a'$ , después a  $a''$  y, por último, al receptor; pero las ondas  $b$  van a  $b'$ , a  $b''$  y no vuelven más.

No tiene período propio esta antena, puesto que en su extremidad  $B$  absorbe la energía que llega allí.

El problema que se plantea ahora es saber cómo es posible construir una antena para no tener reflexión en su extremidad. Es preciso para ello, como acabamos de decir, que la antena se comporte como si más allá de  $B$  se prolongase en una longitud infinita, puesto que en este caso las ondas que hubieran franqueado el punto  $B$  no podrían volver nunca.

Estudiemos, pues, *las propiedades de una línea infinitamente larga* caracterizada por su capacidad, su autoinducción y su resistencia por unidad de longitud.

Hemos visto que la repartición de la tensión y de la corriente a lo largo de tal línea están representadas por las expresiones

$$v = A e^{-\beta x} \operatorname{sen} \Omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$i = B e^{-\beta x} \operatorname{sen} \left[ \Omega \left( t - \frac{x}{u} \right) + \varphi \right]$$

para una onda que viene del origen de oscilaciones  $\beta$  es el coeficiente de amortiguamiento,  $u$  la velocidad de propagación a lo largo del conductor y  $\varphi$  la diferencia de fase entre  $v$  e  $i$ .

Para determinar las constantes  $A$  y  $B$  consideremos la ecuación de la variación de corriente a lo largo de un elemento de la línea, suponiendo el aislamiento de esta línea perfecta; se tiene

$$\frac{\delta i}{\delta x} = C \frac{\delta v}{\delta t}$$

Reemplazando en esta ecuación  $i$  y  $v$  por sus iguales e identificando, encontraremos los valores de las constantes  $A$  y  $B$ , cuya relación representa la impedancia de la línea, puesto que es, prescindiendo de la fase, la relación entre  $v$  e  $i$ .

Se encontrará

$$Z = \frac{\sqrt{L^2 + \frac{\Omega^2}{u^2}}}{C \Omega}$$

Si la línea es poco amortiguada,  $\beta$  es muy débil; despreciando este término,  $Z$  se convierte en

$$Z = \frac{\Omega}{u C \Omega} = \frac{1}{u C} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{C L}} C} = \frac{\sqrt{C L}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

La identificación nos da, además, la diferencia de fase por la fórmula

$$t g \varphi = \frac{\beta u}{\Omega}$$

si la línea es muy poco amortiguada,  $\beta$  es muy débil y el ángulo es próximo de cero.

La propagación de una onda a lo largo de una línea indefinida está, pues, en definitiva, representada por las igualdades:

$$V = B Z e^{-\beta x} \text{sen } \Omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

$$i = B e^{-\beta x} \text{sen } \Omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

Para un observador que esté en la estación y observe el fenómeno, existe entre la diferencia de potencial y la corriente suministrada la relación  $V = i Z$ , es decir, que, en realidad, el alternador que acciona la antena no produce ninguna diferencia de fase y la línea funciona como una simple resistencia cuyo valor sería igual a la impedancia  $Z$ .

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Este resultado es un poco extraño, pues la línea se supone casi sin resistencia; sus elementos constitutivos son autoinducción y capacidad, y, sin embargo, esta línea funciona como una resistencia simple. Pero es preciso observar que la línea toma energía del manantial y no la restituye, y se puede comprender que obre en total como una simple resistencia.

Si suponemos que la antena Beverage está constituida por una canalización comparable a las líneas telegráficas interurbanas, debemos adoptar para las constantes una autoinducción de  $L = 0,0022 H$

por kilómetro y una capacidad de  $0,006 \mu F$  por kilómetro. Con estos datos se encuentra para la velocidad de propagación a lo largo de la línea  $\mu = \frac{1}{\sqrt{L G}} = 275.000$  kilómetros por segundo (valor próximo de la velocidad de la luz) y la resistencia aparente de la línea, es del orden de 600 ohms.

Vemos así por un cálculo que no pretende una gran presión, que la resistencia aparente de la línea es del orden de algunos centenares de ohms; es esta resistencia la que hace falta intercalar en la toma de tierra extrema para absorber la onda reflejada como se pretende en las antenas Beverage.

Siendo nuestros cálculos bastante incompletos, no es cierto que baste una simple resistencia para suprimir absolutamente la reflexión en la toma de tierra extrema; podrá ser necesario en la práctica utilizar con este fin una especie de *línea artificial*, comprendiendo una autoinducción o una capacidad añadida a la resistencia, que es la que constituye el elemento esencial.

Pasemos a examinar cómo actúa, para transmisiones que lleguen de diferentes direcciones, una antena constituida como acabamos de decir:

A) Si la antena está excitada en varios puntos,  $a_1, a_2, a_3$ , por una onda que llega en una dirección perpendicular al plano de la

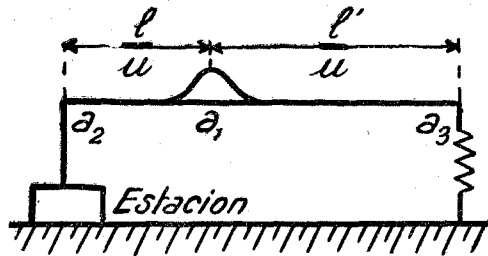


Fig. 61

antena, las f. e. m. inducidas en los diferentes puntos de la antena son exactamente sincronas. Cada una de ellas da origen a una onda que se propaga hacia el receptor  $S$ , pero estas ondas no llegan al mismo tiempo; se van a presentar en el receptor con cierto retardo las unas con relación a las otras.

Si, por ejemplo, la longitud de la antena es igual a la longitud de onda, las pulsaciones que provienen de la mitad izquierda  $a_1 a_2$  están exactamente en oposición de fase con las que provienen de la

mitad de la derecha  $a_1 a_3$ . Habrá, pues, interferencia completa entre estas ondas, y el receptor en  $S$  no recibirá nada (o casi nada).

*B)* Supongamos ahora que el origen de la transmisión sea hacia la derecha del cuadro. La extremidad  $a_3$  será la primera que ataca a la onda; después,  $a_1$ , con un retardo  $\frac{l'}{v}$  ( $l'$  distancia de  $a_3$  a  $a_1$  y  $v$  velocidad de propagación de las ondas en el aire).

La onda provocada en  $a_3$  llegará a  $a_1$  a través de la antena en un tiempo  $\frac{l'}{u}$  ( $u$  velocidad a lo largo del hilo).

Prácticamente se pueda admitir que se tiene  $u = v$  de suerte que la onda que partió de  $a_3$  llega a  $a_1$  en el momento en que la onda se crea en  $a_1$ .

El efecto se *aumenta*, pues, a todo lo largo de la antena, y en cada punto la onda creada por la transmisión de radio tendrá una amplitud mayor que en los puntos más alejados sobre la antena; se incrementará, pues, en la suma de las amplitudes proporcionadas por todos los manantiales precedentes.

A medida que la antena sea mayor, la recepción será más fuerte. Se concibe, sin embargo, que haya un límite en esta amplitud, pues la antena radia energía, pierde por efecto Joule a lo largo del hilo y la intensidad recibida no puede aumentar indefinidamente.

*C)* En el caso, por último, en que la emisión proviniese de la izquierda, el punto  $a_3$  sería atacado después del punto  $a_1$ , y al cabo del tiempo  $\frac{l'}{v}$ . La onda emitida por el punto  $a_3$  llegaría a  $a_1$  con un retardo igual a  $\frac{l'}{u}$  respecto de la época en que ha sido producida y esta época estaba ya en retardo  $\frac{l'}{v}$  respecto de la producción de la onda en  $a_1$ . Estas dos están, pues, decaídas en el tiempo

$$\frac{l'}{u} + \frac{l'}{v}$$

Así para todos los puntos hay diferencias de fase, en tanto que en el caso *B* había constantemente concordancia de fase. De ello resulta que los efectos de las ondas parciales producirán interferencias en el receptor  $S$  y la recepción será finalmente muy atenuada.

En definitiva, no se recibirá apenas más que lo que proviene de la dirección de la antena, con la condición, sin embargo, de que nues-

tros razonamientos sean aplicables, y como están basados en la existencia de grandes diferencias de fase a lo largo de la antena, es preciso que la antena tenga una longitud, por lo menos, igual a una longitud de onda de las radiaciones que se quieren recibir.

Esta propiedad directiva es muy buena para la recepción; se eliminan así muchas interferencias. Es por lo que la antena *River-head* recibe lo que llega de Europa y no recibe lo que llegue de las estaciones americanas.

Se ve también que la antena Beverage debe eliminar una parte de los parásitos, los que vienen de la dirección opuesta a aquella que se quiere recibir, y esto es particularmente útil para la recepción en la costa E. de los Estados Unidos en donde los parásitos que provienen del Océano son menos importantes que los que vienen del continente.

Observemos finalmente que, debido a las propiedades selectivas de esta antena, una estación receptora que quiera recibir de varias emisoras debe tener varias antenas receptoras.

## CAPITULO XI

### Propagación en el espacio libre de las ondas radiadas por una antena.

78. *Asimilación de la tierra a una superficie plana infinitamente conductora. Imágenes de las antenas.*—Las ondas de la radiotelegrafía no penetran profundamente en el suelo, y si la tierra fuera infinitamente conductora, el paso de las ondas no produciría allí más que corrientes completamente superficiales. La superficie del terreno constituiría, entonces, una *pantalla* electromagnética perfecta, protegiendo completamente el subsuelo, en el cual ningún campo, ni eléctrico ni magnético, podría producirse. Esta pantalla funcionaría, con respecto al espacio exterior, como un verdadero *espejo* que reflejase de abajo hacia arriba la energía que la antena le envía de arriba hacia abajo.

Por otra parte, en un radio de algunos centenares de kilómetros alrededor de una antena, la curvatura del Globo terrestre modifica muy poco la propagación de las ondas radiotelegráficas, y dentro de estos límites se puede asimilar la superficie de la Tierra a una superficie plana.

Las condiciones de radiación de una antena no son, pues, muy diferentes de las que hubieran sido realizadas si la antena hubiera podido establecerse sobre un suelo *plano e infinitamente conductor*.

Vamos a demostrar ahora que cualquiera que sea la forma de la antena, el campo electromagnético radiado por encima de un suelo *plano infinitamente conductor* es el mismo a cualquier distancia que el que produciría la antena dicha y *una imagen* de ella simétrica respecto al plano del terreno.

Supongamos, pues, que hagamos vibrar en el espacio libre el sistema simétrico formado por las dos antenas, y supongamos también que se halla determinado completamente en todo momento en el espacio libre la distribución del campo electromagnético. Siendo los *datos* del problema actual *simétricos*, la solución debe ser también simétrica. Esta simetría general conduce a estas dos consecuencias:

- 1.<sup>a</sup> Que en todo plano de simetría, el campo eléctrico tiene una dirección normal al plano; y
- 2.<sup>a</sup> Que en cada uno de sus puntos, el campo magnético le es tangente.

Pero si se vuelve al problema inicial de una antena  $OAB$  colocada en un suelo  $PP'$  (fig. 62), las condiciones en los límites a las

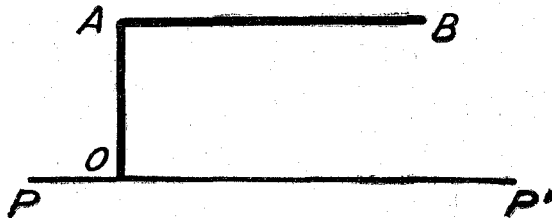


Fig. 62

cuales el campo electromagnético debe satisfacer en todos los puntos de la superficie plana  $PP'$  son precisamente los que acabamos de encontrar para el campo radiado en el espacio libre por la antena doble.

De ello resulta que el campo producido por esta antena doble es una *solución* del problema inicial de la radiación de la antena simple, y podremos considerar como demostrada la proposición enunciada, toda vez que es posible establecer que las ecuaciones del campo electromagnético no admiten más que una solución cuando están fijadas las condiciones de los límites. En la solución del *problema* siendo *simétrico* (fig. 63), el campo eléctrico, *las cargas eléctricas* que llevan los elementos correspondientes de las dos antenas son dos a dos iguales y de signos contrarios.

No hay nunca ambigüedad cuando se trata de aplicar la regla que acabamos de anunciar. Pero hace falta tener cuidado en definir la correspondencia en las cargas eléctricas.

En el caso de la antena en  $T$ , por ejemplo, las corrientes son de sentidos contrarios en las partes horizontales de la antena y su ima-

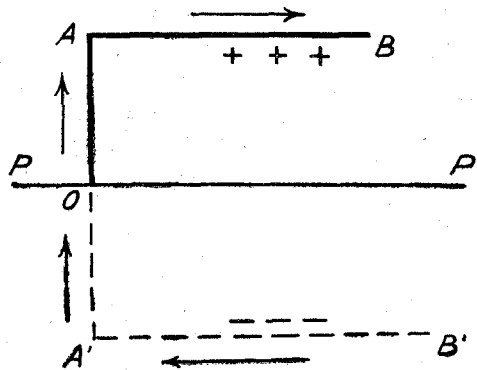


Fig. 63

gen, pero las corrientes son de igual sentido en las partes verticales.

Si la antena de emisión fuera reemplazada por un cuadro vertical formando parte de un circuito de condensador, las porciones horizontales del cuadro y de su imagen estarían recorridas por corrientes de sentido contrario. Pero se encontraría todavía corrientes del mismo sentido en las partes verticales de los circuitos.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y lo que ya sabemos sobre la radiación de un dipolo podemos por integración deducir la radiación de una antena cualquiera.

79. *Resistencia de radiación.*—Caso de un dipolo y caso de una antena en  $\Gamma$ .—Según dijimos, a una distancia grande del dipolo la energía está indicada por la fórmula

$$\frac{2 \mu \omega^2 I_0^2 \cos^2 \omega t dl^2}{3 c_1}$$

valor que ya se dijo entonces era independiente de la distancia.

Esta fórmula vamos a transformarla para que aparezca la longitud de onda  $\lambda$ . Para ello, sustituimos  $\omega$  por su igual  $\frac{2 \pi c_1}{\lambda}$  e  $I_0^2 \cos^2 \omega t$  lo sustituimos por su igual  $I_{eff}^2$



Tendremos

$$\frac{2 \frac{C^2}{K C_1^2} \cdot \frac{4 \pi^2 C_1^2}{\lambda^2} I_{eff}^2 d l^2}{3 C_1} = \frac{8 \pi^2 C^2}{3 K} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \frac{d l^2}{\lambda^2} I_{eff}^2 \quad [97]$$

Si esta potencia radiada tuviera que ser disipada por la misma corriente en una simple resistencia, el valor de  $R$  que sería preciso dar a esta resistencia para obtener la igualdad de potencias sería la que satisficiera a la ecuación

$$R I_{eff}^2 = \frac{8 \pi^2 C^2}{3 K} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \frac{d l^2}{\lambda^2} I_{eff}^2$$

es decir,

$$R = \frac{8 \pi^2 C^2}{3 K} \cdot \frac{1}{C_1} \cdot \frac{d l^2}{\lambda^2} \quad [98]$$

Esta cantidad  $R$  ha recibido el nombre de *resistencia de radiación del dipolo*. Su valor será substituyendo en lugar de  $C$  su igual  $3 \times 10^{10}$  y haciendo  $K = 1$  en el aire,

$$R = 8 \pi^2 10^{10} \frac{d l^2}{\lambda^2} \text{ C G S} \quad [99]$$

o todavía

$$R = 80 \pi^2 \frac{d l^2}{\lambda^2} \text{ ohmios} \quad [100]$$

Este valor depende no solamente de las dimensiones del dipolo, sino también de la longitud de las ondas emitidas.

Una antena de gran capacidad terminal (antenas en T o en  $\Gamma$  o de paraguas) puede ser asimilada a la mitad de un dipolo cuando vibra encima de un suelo infinitamente conductor, emitiendo una

longitud de onda muy grande con relación a las dimensiones de la antena (\*).

En este caso, el dipolo equivalente tiene una longitud *doble* de la altura  $h$  de la antena, puesto que está formado por la antena y su imagen. La resistencia de radiación de un tal dipolo sería igual

$$R = 80 \pi^2 \frac{(2h)^2}{\lambda^2} = 320 \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \text{ ohms} \quad [101]$$

Pero en tanto que el dipolo radiaría en todo el espacio, la antena no radia más que en el hemisferio situado por encima del suelo. La emisión de energía de la antena es, pues, solamente *mitad* de la del dipolo, y debemos tomar para *resistencia de radiación de una antena de gran capacidad terminal*, la expresión

$$R = 160 \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \text{ ohm} \quad [102]$$

Cuando, por ejemplo, la antena de la gran estación de Croix d' Hins (Burdeos), cuya altura es de 250 metros, emite ondas de 25.000 metros, la resistencia de radiación será

$$R = 160 \pi^2 \frac{(250)^2}{(25.000)^2} = 0,16 \text{ ohm}$$

(\*) Para que la onda que emita una antena sea muy grande respecto de las dimensiones de la antena es preciso que se haya colocado una gran autoinducción en la base y la repartición de corriente será indicada en la figura 64, es decir, en la parte

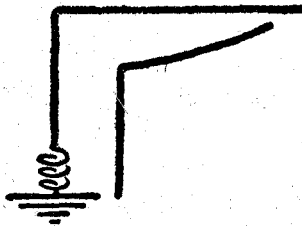


Fig. 64

vertical se puede suponer que la intensidad es constante, que es la condición del dipolo.

Esta resistencia de radiación es bastante pequeña en comparación de las resistencias que deben ser previstas para la toma de tierra y para la autoinducción de antena, y se observa, en este ejemplo particular, qué pequeño es el rendimiento de una emisora radiotelegráfica. Independientemente de las pérdidas de las máquinas y en los circuitos primarios, *la mayor parte de la energía proporcionada al circuito de antena se emplea en calentar la autoinducción de antena o se disipa bajo forma de calor en la toma de tierra.*

80. *Resistencia de radiación de una antena cualquiera. Caso de la antena vertical simple.*—Para evaluar la radiación de una antena cualquiera, se calculan primeramente los valores del campo eléctrico y del campo magnético producidos (a una distancia grande que llamaremos  $r$ ) por la radiación de cada una de las corrientes infinitamente cortas que por su yuxtaposición constituyen el conjunto de las corrientes de la antena. Se forma en seguida el vector de Pointing en el punto considerado y se calcula, en fin, el flujo de este vector a través de la semiesfera de radio  $r$ , situada por encima del suelo.

Para una frecuencia dada, la radiación es proporcional al cuadrado de la intensidad  $I_{eff}$  medida en el pie de la antena, de suerte que se puede siempre hablar de una resistencia de radiación  $R$ . Es, por otra parte, bien evidente que, bajo reserva de dar a la letra  $h$  una significación conveniente, se tiene siempre el derecho de representar esta resistencia de radiación por una fórmula del mismo tipo que la que se ha obtenido para las antenas de gran capacidad terminal

$$R = 160 \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \text{ ohms}$$

pero  $h$  no es ya aquí igual a la altura  $H$  de la antena; la cantidad  $h$  es lo que se llama *altura efectiva* o *altura eficaz* de esta antena, y esta cantidad es siempre más pequeña que la altura real  $H$ . La altura efectiva  $h$  varía, por otra parte, con la longitud de onda (pues varía la distribución de corriente en la antena y, por consiguiente, el vector de Pointing).

Para la antena simple constituida por un conductor vertical único de altura  $H$  se verá en el estudio de las antenas que su altura efectiva es

$$h = \frac{2}{\pi} H (*) \quad [103]$$

cuando la antena vibre en cuarto de onda.

Este valor de  $h$  da para la resistencia de radiación

$$R = 160 \pi^2 \frac{4}{\pi^2} \frac{H^2}{\lambda^2} \text{ ohms}$$

pero como en este caso la longitud de onda  $\lambda$  vale  $4 H$ , la expresión de  $R$  resulta

(\*) Como por la fórmula de la energía radiada es proporcional al cuadrado de la longitud del dipolo por el cuadrado de la intensidad, es decir, al cuadrado del producto de la longitud del dipolo por la intensidad de corriente, se comprende que si la antena está en cada punto recorrida por distintas corrientes y representamos en la figura 65 por las curvas  $B C$  las intensidades de corriente en cada punto de la antena la energía radiada será proporcional al cuadrado del área  $A B C$ . Si ahora buscamos un rectángulo  $A D E C$  de base  $A C$  ( $l$ ) y cuya área sea igual a la de la figura  $A B C$ ,

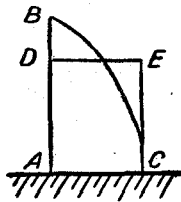


Fig. 65

$A D$  podrá representar la altura de un dipolo (corriente constante en todos sus puntos) que radie igual energía que la antena  $A B$ , con lo cual  $A D$  será la altura efectiva de la antena.

En nuestro caso (vibración en cuarto de onda) la intensidad en un punto cualquiera a una distancia  $x$  del vértice será:

$$I_x = I_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2 l}$$

de donde el área de  $A B C$  será:

$$\int_0^H I_0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2 H} dx = I_0 \frac{2 H}{\pi} \left( -\cos \frac{\pi x}{2 H} \right)_0^H = I_0 \frac{2 H}{\pi}$$

de donde la altura será:

$$h = \frac{2}{\pi} H$$

$$R = 40 \text{ ohmios.}$$

Es interesante observar que esta resistencia  $R$  es *independiente de la altura de la antena*, con la que se ha hecho la emisión, siempre que se trate de una antena simple vibrando en cuarto de onda. Y no es menos curioso que la radioelectricidad nos enseña así que existe en la Naturaleza un verdadero patrón de resistencia de 40 ohmios, que se puede construir de cualquier tamaño, sin tener necesidad de procurarse cantidades definidas de ciertas materias determinadas, como cuando se quiere construir, por ejemplo, patrones de mercurio.

Si la antena simple que acabamos de describir está provista de una autoinducción de antena de manera que emita ondas más largas que la fundamental, la corriente a lo largo de la antena a una distancia  $x$  del vértice está representada según lo dicho por la expresión

$$i = I\sqrt{2} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \operatorname{sen} \omega t$$

y la corriente es sensiblemente proporcional a la distancia  $x$  al vértice. Cuando la autoinducción es grande, *la longitud  $\lambda$  es francamente mayor que la longitud de la onda fundamental*. En este caso se ve por la figura 66 que la línea  $BC$  representa la distribución de

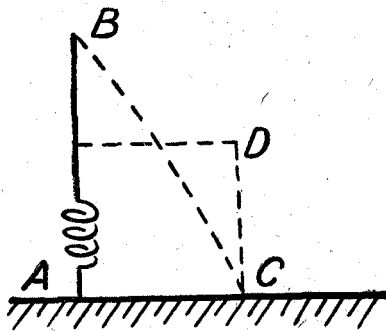


Fig. 66

la corriente, y se concibe que dicha antena radie lo mismo que una antena de la mitad de altura recorrida por corriente constante, resultando de ello que la altura efectiva la podemos hacer igual a

$$h = \frac{H}{2}$$

La resistencia de radiación es entonces igual a

$$R = 40 \pi^2 \frac{h^2}{\lambda^2} \quad [104]$$

el coeficiente de radiación es, pues, sensiblemente inferior al que hemos encontrado para las emisiones sobre la onda fundamental.

81. *Campo de una antena en el espacio libre.*—Si tenemos una antena de gran capacidad terminal, es decir, una antena en la cual la parte vertical puede asimilarse a un dipolo por ser la corriente que la recorre constante, el último término de la fórmula [36] del párrafo 37 representará, multiplicada por 2, el valor del campo eléctrico en un punto situado a la distancia  $r$  de la antena. Vamos a transformar dicha fórmula haciendo entrar la longitud de onda

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T} \\ \lambda &= C_1 T \end{aligned} \right\} \omega = \frac{2\pi C_1}{\lambda} \quad \mu = \frac{C^2}{K C_1^2}$$

sustituyendo en la [36]

$$\begin{aligned} 2 \frac{\mu I_0 \omega \cos \omega t dl \sin \varphi}{r} &= 2 \frac{C^2}{K C_1^2} I_0 \frac{2\pi C_1}{\lambda} \cos \omega t dl \sin \varphi \frac{1}{r} = \\ &= \frac{4\pi c^2 I_0 \cos \omega t dl \sin \varphi}{K C_1 r \lambda} = \frac{4\pi c I_0 \cos \omega t dl \sin \varphi}{r \lambda} \text{ U E M } [105] \end{aligned}$$

pues en el espacio  $C \Rightarrow c_1$  y  $K = 1$ .

Como vemos, el campo depende de la colatitud  $\varphi$  y será máximo en el plano ecuatorial del emisor. Consideremos un punto en dicho plano, el valor de la amplitud del campo eléctrico será

$$\text{mod } \vec{h} = 4\pi c \frac{I_0 dl}{r \lambda} \text{ (U. E. M.)} \quad [106]$$

Si ahora pasamos de las unidades electromagnéticas a las prácticas, la fórmula [106] se transformará en

$$\text{mod } \vec{h} \left( \frac{\mu V}{m} \right) = 377 \frac{I \text{ (amp)} \times h \text{ (m)}}{\lambda \text{ (Km)} \times r \text{ (Km)}} \quad [107]$$

Esta fórmula da los microvoltios-metros de campo, y debe tenerse en cuenta que sirve para cualquier clase de antenas, siempre que en lugar de  $h$  se ponga  $h_e$  altura efectiva o eficaz de la misma. Para formarse una idea de la importancia que tiene que tener un campo, según las aplicaciones, diremos que: un campo muy débil en el límite de utilización es del orden de algunos microvoltios por metro; un campo fuerte y francamente bueno para una recepción radiofónica es del orden de un milivoltio por metro; por último, campos del orden del voltio por metro no se encuentran más que en la proximidad inmediata de las emisoras.

Si en el vector campo magnético hiciéramos análogas transformaciones podríamos encontrar la fórmula siguiente, que relaciona los dos campos:

$$\vec{h} \text{ (voltios-metros)} = 3.10^4 \vec{H} \text{ (gauss)} \quad [108]$$

Se deduce de esta forma y de lo dicho anteriormente que el campo magnético será siempre una fracción pequeñísima de *gauss*.

82. *Resultados prácticos de las observaciones.*—Cuando Marconi consiguió hacer pasar un primer mensaje por encima del paso de Calais, se estaba lejos de pensar en el desarrollo extraordinario que tomaría un día la T. S. H.; se consideraba, con razón, que las ondas electromagnéticas de gran longitud seguirían las leyes ya conocidas a las que obedecen sus hermanas mayores, las ondas luminosas. Seguramente la diferencia considerable entre las longitudes de unas y otras debían dar lugar a divergencias importantes; la difracción, por ejemplo, sería mucho más grande que para las ondas luminosas; las ondas hertzianas contorneaban, pues, los obstáculos más fácilmente, atravesarían las nieblas, alcanzarían los navíos en el mar a distancias notablemente más grandes que los faros luminosos. Pero nadie pensaba en hacerlas atravesar los océanos.

Sin embargo, Marconi, continuando sus experiencias, se daba cuenta que las señales alcanzaban mucho más de lo que se había pensado; intentó la travesía del Atlántico, y el 12 de diciembre de 1901 llegó a hacerlo. Seis años más tarde, estaciones establecidas en Irlanda y Nueva Escocia aseguraban un servicio radiotelegráfico entre el Antiguo y Nuevo Continente.

Los progresos hechos en el aumento del alcance animaron a pedir cada día más a la radiotelegrafía, construyendo cada vez estaciones más potentes. Este aumento de potencia exigía, por el procedimiento empleado entonces para engendrarla, el aumento de longitud de onda y el empleo de grandes antenas.

Por esta razón, y también porque no se sabía producir ondas cortas en buenas condiciones, toda la gama de frecuencias superiores a  $10^6$  fué sistemáticamente dejada de lado hasta 1920. En esta época, los progresos hechos en la fabricación de válvulas permitieron la construcción fácil de emisores de frecuencias más elevadas.

Los aficionados, a los cuales se les había regalado las frecuencias juzgadas inútiles, hicieron numerosos ensayos, y los resultados que obtuvieron en seguida les animaron a continuar con pasión los ensayos. Entre ellos, las comunicaciones sin hilos fueron un deporte, los *records* se sucedieron; en dos o tres años habían agotado todo el espacio de la Tierra; las comunicaciones con los antípodas fué una cosa corriente. Mientras tanto, los servicios radiotelegráficos comerciales y oficiales habían seguido camino paralelo y, disponiendo de medios considerables, habían establecido definitivamente las ventajas que se podían sacar de las ondas cortas.

Fué una etapa tan importante como la de Marconi cuando demostró la posibilidad de atravesar el Atlántico. La admiración no fué menor. La utilización racional de las ondas electromagnéticas pedía un estudio detallado de los fenómenos ligados con su propagación; las hipótesis y teorías ya expuestas anteriormente tuvieron de nuevo actualidad, y comenzó una serie de trabajos considerables que han introducido en la física un nuevo capítulo y han explicado el papel capital desempeñado por la alta atmósfera en las comunicaciones radioeléctricas.

Los resultados de las observaciones son extremadamente complejos; dependen de un gran número de variables cuyas variaciones se enlazan. Es decir, que una clasificación clara de los resultados de la observación es imposible, y la enumeración será puramente cualitativa y se limitará a indicar la marcha de los fenómenos. De todas maneras hará resaltar, sin embargo, hechos importantes cuyo conocimiento es indispensable en un estudio a fondo de las comunicaciones radioeléctricas.

Para la comodidad del lenguaje emplearemos las denominaciones aconsejadas por el Comité Consultivo Radioeléctrico reunido en La Haya el año 1929. Estas denominaciones son:



$f < 100$ Kc/s	$\lambda > 3.000$ m.	ondas largas.
$100 < f < 1.500$ ídem	$3.000 > \lambda > 200$ m.	ídem medias.
$1.500 < f < 6.000$ ídem	$200 > \lambda > 50$ m.	ídem intermedias.
$6.000 < f < 30.000$ ídem	$50 > \lambda > 10$ m.	ídem cortas.
$30.000 < f$	$10 > \lambda$	ídem extracortas.

*Variación del alcance en función de la frecuencia.*—Es difícil dar a la palabra alcance un significado exacto; se puede decir, evidentemente, que es la distancia a la cual una emisión de potencia dada es convenientemente recibida; pero la recepción depende del receptor empleado y, en gran parte, del operador que lo emplea. Además, la energía en la recepción es función del uso al cual se destinan las señales; una utilización comercial, como hemos visto (párrafo 81), es bastante exigente, por ejemplo, si se le compara con utilizaciones militares, que permiten una recepción de señales a una cadencia lenta. Por último, y sobre todo el estado de las perturbaciones atmosféricas en el lugar de la recepción, modifica en proporciones muy elevadas la potencia indispensable para la comprensión de las señales.

Debido a esta última influencia, el alcance será función de la estación, de la hora del día, de la latitud o, más exactamente, de la posición geográfica del lugar de recepción.

Como no se trata actualmente más que de comparar las facilidades de propagación de las ondas según las frecuencias, podremos simplificar el problema y definir el alcance, como la distancia a la cual un emisor de potencia dada produce un campo eléctrico dado de antemano.

Es con arreglo a un convenio de este género como han sido trazados los gráficos de las figuras 67 y 68. Los datos que allí figuran son relativos a la recepción de un emisor cuya potencia *radiada* es de 5 Kws. El campo que se requiere en la recepción es de  $10 \mu$  V por metro para todas las frecuencias inferiores a 2.000 kc./s.; decrece en seguida (\*) progresivamente, para ser de  $1 \mu$  V./m. para la fre-

(\*) La disminución del campo eléctrico necesario para la recepción es debida a que al disminuir la longitud de la onda, disminuye la constante de tiempo de los circuitos receptores, pudiendo alcanzar, por consiguiente, una señal más débil igual intensidad en el receptor que otra más grande con constante de tiempo mayor. Todo esto se expresa diciendo que para recibir en buenas condiciones es preciso que la relación  $\frac{h}{\lambda}$  no baje de un valor determinado. Se ve que es posible, aun conservando un valor dado esta relación, disminuir  $h$  cuando disminuye  $\lambda$ .

cuencia de 20.000 kc./s. Estos campos son los más débiles, que permiten una recepción práctica con casco. Aunque sea posible obtener amplificaciones grandísimas con los medios que disponemos hoy, la amplificación de las señales está limitada por los muchos parásitos de toda clase que se mezclan con las señales y son amplificados con ellas. Son estos parásitos, designados frecuentemente con el nombre de *ruidos de fondo*, los que imponen un límite absoluto al campo utilizable en la recepción. La definición de este límite supone, claro está, que no hay perturbaciones atmosféricas.

Las escalas de distancias y frecuencias son cúbicas, es decir, que los números que están allí escritos son proporcionales a los cubos de la distancia contados desde el origen. Estas escalas permiten una separación cómoda de frecuencia y distancias sobre el gráfico.

*Influencias según la hora del día y la estación.*—Los alcances de noche son superiores a los del día. Bastante poco importante para las frecuencias inferiores a 60 kc./s., este efecto se hace considerable para las ondas cortas; los alcances de noche son, entonces, de 10 a 15 veces superiores a los del día.

Los fenómenos cambian de aspecto cuando se alcanza y pasan las frecuencias de 15.000 kc./s. precisamente; estas ondas no son oídas más que durante el día, excepto a 15 ó 20 kilómetros del emisor, que son oídas también de noche.

En cuanto a la influencia de las estaciones, se manifiestan por un aumento de los alcances en invierno. Las estaciones tienen también un efecto importante sobre las duraciones posibles de explotación durante un período de veinticuatro horas, debido a la desigual duración de los días y de las noches.

Los diagramas de las figuras 67 y 68 demuestran que las ondas cuya frecuencia alcance y pase de 6 a 7.000 kc./s. pueden llegar fácilmente a las antípodas, y hasta se debe suponer que sobrepasan estos puntos para continuar su camino alrededor de la Tierra. Esto lo verifica la experiencia.

Pero las facilidades de propagación varían mucho, según que el camino esté iluminado u oscuro; ocurre que, según la posición de la línea de sombra sobre la Tierra, es, a veces, el más largo de los dos arcos de círculo máximo, uniendo el emisor al receptor, el que representa el camino más favorable. Las ondas que llevan las señales llegan entonces al receptor en la dirección opuesta a la que se tiene costumbre de considerar el emisor. Este fenómeno es corriente en

el tráfico, y las estaciones de recepción dirigida deben entonces invertir la posición de las redes reflectoras en ciertas horas del día.

Cuando las ondas, siguiendo los dos caminos, llegan con intensidades casi iguales, los receptores dirigidos pueden evidentemente

**ALCANCES APROXIMADOS DE LAS ONDAS RADIOTELEGRÁFICAS A TRAVÉS DE LA GAMA DE FRECUENCIAS**

Ver las explicaciones relativas a este gráfico en el texto adjunto

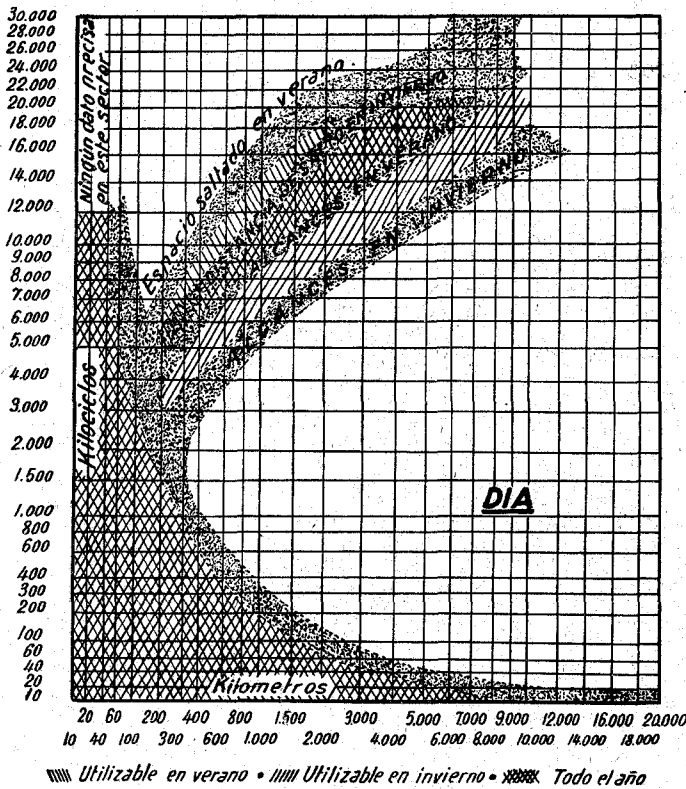


Fig. 67

La anchura de los límites rayados indica las divergencias medias reconocidas por diferentes observadores.

emplear una u otra posición en las redes reflectoras; pero los receptores no dirigidos reciben entonces las dos ondas, y sus señales, superponiéndose, se interfieren, haciendo imposible la recepción. Por esta circunstancia se descubrió la propagación en los dos sentidos.

Se han emprendido experiencias sistemáticas para estudiar estos fenómenos. El registro preciso de señales muy breves ha permitido medir las duraciones de propagación. Se ha encontrado que éstas correspondían a ondas que se propagaban con la velocidad de la

**ALCANCES APROXIMADOS DE LAS ONDAS RADIOTELEGRÁFICAS A TRAVÉS DE LA GAMA DE FRECUENCIAS**

Ver las explicaciones relativas a este gráfico en el texto adjunto

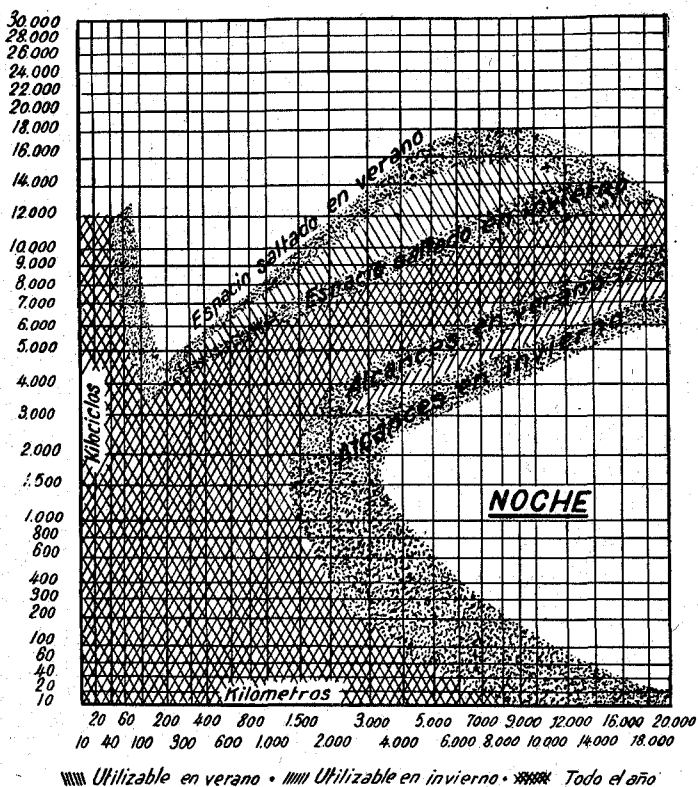


Fig. 68

La anchura de los límites rayados indica las divergencias medias reconocidas por diferentes observadores.

luz a una altura media de un centenar de kilómetros por encima de la superficie de la Tierra. A continuación de estos descubrimientos, las experiencias fueron continuadas por Quack en la Telefunken con una onda de 19.370 kc./s. (15,5 m.); los registros pusieron entonces

en evidencia la existencia de una serie de señales sucesivas que provenían de una sola señal emitida. La separación en el tiempo entre estas señales era exactamente igual a 0,1375 de segundo, duración que corresponde al tiempo que las ondas tardarían en dar la vuelta a la Tierra en las mismas condiciones de velocidad y altitud que anteriormente. La figura 69 es la reproducción de estos registros. Se

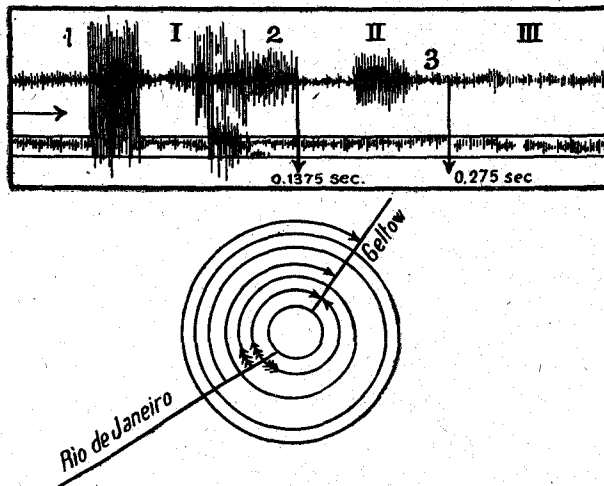


Fig. 69

ve que la intensidad de las señales suplementarias decrece lentamente.

Semejantes resultados no pueden obtenerse más que en épocas y en horas determinadas en el momento en que todo el recorrido de la onda alrededor de la Tierra está iluminado, es decir, cuando el círculo máximo, límite de la luz y la sombra, pasa por el receptor y por el emisor a la vez; pero demuestran la prodigiosa facilidad con que las ondas cortas se propagan.

*Zonas de silencio.*—Un fenómeno, *a priori*, más curioso todavía que los precedentes se encuentra en la propagación de las ondas cortas. Las señales de una estación, fuertemente oídas a 15 ó 20.000 kilómetros, pueden ser completamente imposibles de registrar en una zona de algunos millares de kilómetros, y cuyo límite más próximo del emisor se encuentra a decenas de kilómetros de éste. Si se aleja del emisor se empieza por observar una disminución gradual y-rápida de las señales hasta la extinción completa; se recorre entonces la zona de silencio, y en el momento en que se llega a su límite ex-

terior, las señales reaparecen casi bruscamente con una energía considerable, que disminuye sólo con lentitud. Un aumento importante de la potencia no modifica más que muy poco la anchura de la zona de silencio; su límite exterior, en particular, está apenas desplazado.

Las zonas de silencio son mayores durante la noche que durante el día, y este fenómeno es muy marcado para las frecuencias próximas de 4 a 5.000 kc./s., que no manifiestan zona de silencio más que durante la noche.

El límite situado del lado del emisor está tanto más cerca de este último cuanto que la frecuencia es más elevada. Para una frecuencia de 15.000 kc./s., y mayores, las señales desaparecen completamente a distancias de 15 ó 20 kilómetros.

El límite exterior de la zona se separa a medida que la frecuencia aumenta. Para frecuencias superiores a 23.000 kc./s., no se está seguro de volver a encontrar a gran distancia una región en donde las señales sean de nuevo oídas. Más allá de 30.000 kc./s. es excepcional que se oigan señales a gran distancia. Las ondas extracortas no pueden ser utilizadas más que en condiciones especiales.

Esta exposición de las propiedades de las zonas de silencio muestran la complejidad de la cuestión. Es todavía demasiado simplista, pues Bureau, a consecuencia de largas y pacientes experiencias, ha demostrado que es preciso no considerar estas zonas como limitadas por círculos centrados en el emisor. Esas zonas se descomponen frecuentemente en varios anillos o porciones de anillos, repartidos de manera muy caprichosa; la figura 70 da una idea de las configuraciones que se pueden observar.

*Influencia geográfica.* — Las regiones de la Tierra atravesadas por las ondas juegan un papel importante en su propagación; pero este papel no está muy bien definido. Lo que se puede afirmar es que la propagación es mucho mejor por encima del mar que por encima de la Tierra para las ondas largas y medias.

La dirección en la cual caminan tiene igualmente importancia; la propagación Norte-Sur es francamente mejor que la Este-Oeste.

Las regiones tropicales se comportan de una manera diferente con relación a las zonas de silencio. Parece deducirse de las observaciones hechas en estas regiones que, al menos en un radio de un millar de kilómetros alrededor de una estación trabajando con una frecuencia comprendida entre 6 y 10.000 kc./s., las señales son siempre percibidas.

Es claro que la configuración del suelo en la proximidad del receptor juega igualmente un papel sobre la calidad de la recepción; los valles profundos, las montañas, producen una desviación y sombras que pueden favorecer, o perjudicar, una recepción.

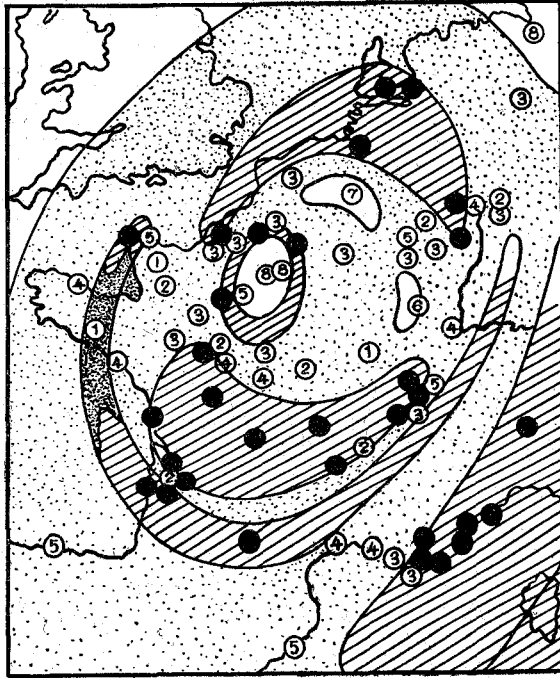


Fig. 70

*Efecto "Fading".* — Se designa por este nombre anulaciones o debilitamientos de las señales; la duración de este efecto es extremadamente variable para una misma emisión, y su importancia es función de la frecuencia y de la distancia del emisor.

Casi inexistente en las ondas largas, este efecto es, sobre todo, sensible en la gama de frecuencias comprendidas entre 4 a 500 kc./s. y 2.000 kc./s., aproximadamente. Juegan todavía un papel importante en la recepción de ondas cortas.

Estos fenómenos se producen, sobre todo, durante las noches, pero existen también durante el día, aunque en un grado menor. La figura 71 da un ejemplo muy característico. Las variaciones de la energía recibida pueden ser considerables; relaciones de 1 a 100 en-

tre el mínimo y el máximo no son raras; se pueden observar hasta relaciones de 1 a 1.000.

La duración del efecto varía, en general, entre algunos minutos y algunos segundos, o hasta una fracción de segundo.

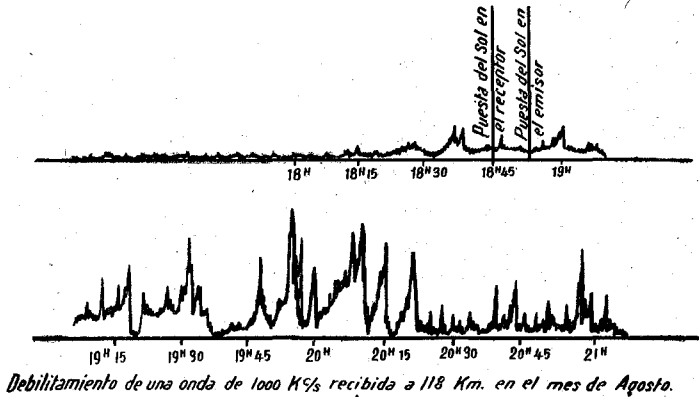


Fig. 71

A distancias de una decena de kilómetros del emisor, el efecto es muy débil; puede alcanzar, sin embargo, 10 por 100 de la energía radiada; aumenta en seguida con la distancia, pasando por su primer máximo a los 100 kilómetros, aproximadamente, para las frecuencias de 500 a 1.000 kc./s.; se pueden encontrar otros máximos a distancias mayores.

En los momentos de amanecer y anoecer se observan sobre todas las ondas, hasta en las largas, efectos "Fading", cuya duración es del orden de un cuarto de hora, y que parecen relacionadas con el paso por las estaciones de emisión y recepción de la línea de sombra que separa las regiones iluminadas y oscuras de la Tierra.

Se ha tenido la ocasión de observar que el efecto se produce con intensidades muy diferentes en ondas muy próximas, tales como, por ejemplo, las que se encuentran agrupadas en las bandas de modulación de las emisoras radiotelefónicas. Se da a este fenómeno el nombre de "Fading selectivo"; constituye una de las causas de las distorsiones señaladas a continuación.

Los eclipses de Sol producen efectos análogos a los de amanecer y anoecer.

*Distorsión de las modulaciones.* — El efecto "Fading" coincide



con una fuerte distorsión de la modulación. Las palabras transmitidas por una estación radiotelefónica resultan de pronto incomprensibles; las señales de chispa musical muy pura dan en estos instantes la impresión de un sonido extraño, proviniendo, por ejemplo, de un tubo rajado.

*Rotación del plano de polarización del campo.*—En las emisiones normales de día en ondas largas o intermedias, el campo eléctrico está polarizado rectilíneamente, y su dirección en las proximidades del suelo es vertical. Si sobre las mismas ondas se mide durante la noche la dirección de este campo, se observan dos clases de fenómenos:

a) El campo eléctrico de la onda recibida cesa de ser normal al suelo (\*) y la observación de las medidas muestra que su inclinación resulta de dos causas distintas;

1.º La onda alcanzando al receptor no se propaga ya paralelamente al suelo, sino que llega en una dirección inclinada.

2.º El plano de polarización del campo ha girado y el campo eléctrico no se encuentra ya en el plano de incidencia. La figura 72

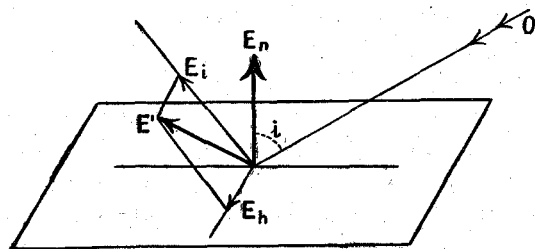


Fig. 72

En posición normal del campo de una emisión  $E$ , posición del campo desviado a consecuencia de la incidencia de las ondas y de la rotación de la polarización.

muestra esta disposición. La onda recibida se propaga en la dirección  $OA$ , y su campo, en lugar de permanecer en el plano de incidencia en  $E_i$ , ha girado y se encuentra en  $E'$ .

b) No solamente el plano de polarización puede haber girado de tal suerte que el campo tome una nueva dirección bien definida,

(\*) Hablamos aquí no del campo resultante que permanece normal al suelo en tanto que la onda es bastante larga para que se pueda admitir que la tierra es un conductor perfecto, sino del campo incidente considerado antes de su reflexión eventual sobre la tierra.

sino una polarización elíptica ha podido sustituir a la polarización rectilínea normal. En este caso, en lugar de conservar una dirección fija en el espacio, el campo toma, en el curso de un período, todas las direcciones situadas en el plano de propagación (fig. 73).

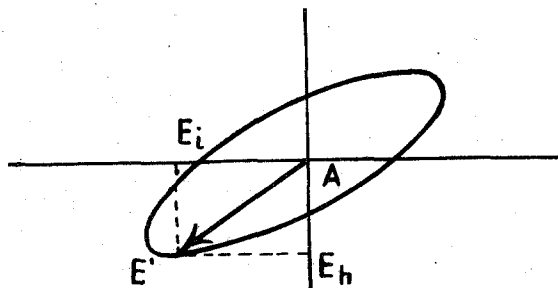


Fig. 73

Las componentes  $E_h$  y  $E_i$  no están ya en fase, la extremidad del vector  $E$  gira alrededor de  $A$  y ocupa durante un período todas las posiciones.

Examinaremos con más detalle estas cuestiones en el curso de radiogoniometría; por el momento, limitémonos a decir que la consecuencia de estos fenómenos es falsear los azimutes de las estaciones que proporcionan los radiogoniómetros o hasta hacer imposible toda medida de azimut.

Estos fenómenos, que no se producen más que durante la noche para las ondas largas y medias, al menos para las frecuencias inferiores a 1.000 kc./s., son completamente generales para las ondas cortas o intermedias. Para estas dos clases de ondas, la polarización elíptica del campo incidente es la regla general de día y de noche.

*Influencias meteorológicas.* — El estado de la atmósfera parece tener una influencia sobre la propagación; pero aunque se hayan podido observar coincidencias bastante claras entre estados determinados de la atmósfera y fenómenos de propagación bien caracterizados, ninguna correlación general ha podido ser establecida.

La temperatura, se ha podido comprobar, influye en la propagación a cortas distancias de las ondas largas. Austin ha demostrado, por observaciones de experiencias hechas en los Estados Unidos, que para las ondas de frecuencia inferior a 30 kc./s. y distancias de 3 a 400 kilómetros, el campo varía en razón inversa de la temperatura.

Si se traza en todo el año el diagrama de las medias mensuales de la intensidad de las señales y el de las inversas de las mismas

medias de las temperaturas Fahrenheit, resultan dos curvas casi exactamente paralelas.

*Ecos retardados.*—Van der Pol en octubre de 1928 y Galle en mayo de 1929, cuando el eclipse de Sol, han observado *ecos* de señales muy breves emitidas en ondas cortas.

Estas señales, constituidas por tres puntos sucesivos, eran observadas a poca distancia de las emisoras, y el intervalo de tiempo separando las señales normalmente recibidas de sus ecos era de *varios* segundos (hasta treinta); ahora bien: una duración de treinta segundos representa el tiempo que las ondas, circulando con la velocidad de la luz, tardarían en ir hasta la Luna y volver.

Estos fenómenos cuya existencia es innegable parece, sin embargo, que no se manifiestan corrientemente.

*Correspondencia entre las variaciones de la propagación y las de la actividad solar.*—Las indicaciones dadas anteriormente muestran la influencia del Sol en la propagación de las ondas; se las podría casi condensar en la siguiente regla: la propagación de las ondas es función de la altura del Sol por encima del horizonte. Se expresarían así los resultados de la observación por lo que respecta a las influencias del día y de las estaciones. Pero se han observado otros efectos cuya relación con los fenómenos solares es muy probable. Las variaciones de la actividad solar, cuya manifestación sensible, la más clara para nosotros, es el mayor o menor número de manchas que aparecen en la superficie de este astro, juegan igualmente un papel en la propagación de las ondas. Se ha observado que las violentas tempestades magnéticas, cuya causa primordial parece ser los fenómenos de actividad solar, coinciden siempre con alteraciones en la propagación. La propagación de las ondas largas es entonces mejor de día que durante la noche; las de las ondas cortas es muy mala, y las comunicaciones en estas ondas se hacen, a veces, imposibles durante varias horas.

Por otra parte, se han hecho trabajos estadísticos para buscar si existiría una correlación entre las variaciones lentas de la actividad solar y las de la propagación. Al presente, parece que a las variaciones de largo período de la propagación siguen las de la actividad solar. Los diagramas de la figura 74, establecidos por Austin, demuestran dicho aserto.

Las ordenadas de la curva señalada "Nauen" son los campos en micro-voltios por metro de esta estación, medidos en Wáshington a las diez horas (local); las de la curva marcada "actividad solar" son

proporcionales a los números de manchas observadas; en los dos casos se trata de medias anuales.

Pero si las comparaciones sobre las medias relativas a largos períodos hace resaltar una gran analogía, no es lo mismo para los cortos períodos. Las curvas relativas a medias trimestrales tienen todavía formas semejantes, pero las de las medias semanales no pre-

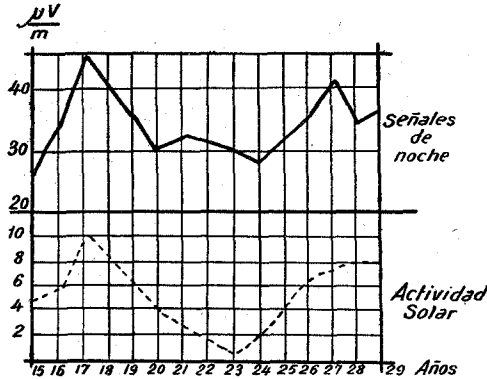


Fig. 74

Correlación entre la propagación y actividad solar representada por las ordenadas proporcionales a los números de manchas.

sentan casi analogía. Hace falta, sin embargo, observar que las manchas solares, que sirven para fijar la actividad solar, porque es la única manifestación sensible a nuestros medios de investigación, no son la causa, sino el efecto de esta actividad, y quizás un efecto completamente insuficiente para apreciar exactamente esta actividad.

83. *Influencia de la alta atmósfera. Ionización de la alta atmósfera.*—Desde que se supo que las ondas hertzianas eran capaces de propagarse a grandes distancias, entró la preocupación de buscar de qué medio se valían estas ondas para contornear los obstáculos de la importancia de la Tierra por sí misma. Eminentemente matemáticos estudiaron los efectos de la difracción; después de largos trabajos llegaron a deducir que la difracción era impotente para explicar los grandes alcances; dicha difracción proporciona valores del campo más de 10.000 veces inferiores a los que realmente se observaba.

Al mismo tiempo que se efectuaban estas investigaciones teóricas, se preocupaban de atribuir a la atmósfera un papel en la propagación. En 1902, casi simultáneamente, Kennely y Heaviside lanzaban la hipótesis de la existencia de una capa ionizada en la alta

atmósfera; las ondas se propagaban entonces entre dos esferas conductoras, entre las cuales la energía quedaba almacenada. Esta hipótesis ha sido desarrollada después; constituye actualmente la base de una doctrina confirmada todos los días por las observaciones.

Antes de estudiar el modo de actuar de esta capa es indispensable echar una ojeada sobre su constitución probable y sobre las causas por las que se forman. Las dos causas siguientes de la ionización de la alta atmósfera son muy verosímiles: bombardeo por corpúsculos emitidos por el Sol a gran velocidad; radiación ultravioleta del Sol.

Se ha discutido mucho sobre la naturaleza de los corpúsculos que lanza el Sol en el espacio y sobre los que hacen ionizar nuestra atmósfera; unos piensan que son rayos positivos  $\alpha$ , otros se inclinan

más bien a que sean rayos negativos  $\beta$ . Es verosímil que las dos clases de rayos producen el efecto; pero no sabiendo en las condiciones que dichos rayos chocan con las moléculas del gas de la atmósfera, no podemos elegir entre los dos rayos.

Entre los efectos producidos por este bombardeo se deben anotar las tempestades magnéticas y las anomalías en la propagación que las acompañan; pero las auroras boreales proporcionan una manifestación particularmente notable, manifestación que se puede seguir con los ojos y se pueden medir sus elementos geométricos con precisión. Los haces y las cortinas de las auroras boreales tienen siempre un límite inferior bien definido, y la altura de este límite ha sido medida en un número considerable de casos por los físicos noruegos.

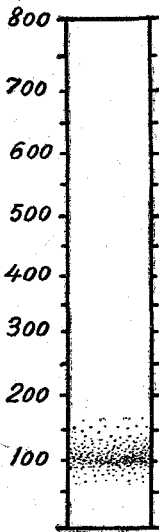


Fig. 75

Alturas en Kms. de los límites inferiores de las auroras boreales observadas en Noruega.

La figura 75 representa los resultados de estas observaciones agrupados de una manera original. Cada punto de esta figura representa una observación, y la agrupación de los puntos en la proximidad de la altura de 100 kilómetros hace resaltar de una manera clara la existencia en esta

región de un estado muy especial de la atmósfera. Veremos más adelante que es a una altura de este orden donde las observaciones electromagnéticas colocan el límite inferior de la capa Kennely-Heaviside.

El bombardeo de los corpúsculos sería insuficiente para explicar los fenómenos de propagación que hemos descrito en el párrafo anterior, pues se ha observado que éstos eran diferentes durante el día que durante la noche, y que se modifican muy rápidamente al amanecer y al anoecer. Ahora bien: los corpúsculos no se propagan en línea recta, pues al aproximarse a la Tierra y entrar dentro del campo magnético de la misma se enrollan en espiral alrededor del eje magnético y chocan con la Tierra, tanto por la cara que mira al Sol como por la opuesta.

Es necesario buscar otra causa de ionización que provenga también del Sol. Parece actualmente que se debe tener en cuenta los rayos ultravioletas, aunque su papel como agente de ionización de la alta atmósfera no está todavía muy claro.

Quedaría, en fin, por conocer la naturaleza de los gases que constituyen la alta atmósfera y la de los iones producidos por las causas citadas. Se admite generalmente que es el hidrógeno el que se encuentra en las altas capas de la atmósfera, pero no se tiene ninguna seguridad en ello. En cuanto a los iones, no se considera frecuentemente más que los iones negativos de los electrones libres, pero esta opinión no es general. La influencia del campo magnético terrestre sobre la absorción y sobre la rotación del plano de polarización del campo parece indicar que son electrones los que constituyen los iones negativos.

*Poder inductor específico de un gas ionizado.*—La constante dieléctrica de un gas ionizado es inferior a la del mismo gas en estado neutro.

Consideremos un campo alternativo existente en un medio ionizado, produce allí en razón de las propiedades dieléctricas del medio una corriente de desplazamiento análoga a la que atravesaría un condensador; esta corriente está, pues, adelantada  $90^\circ$  respecto del campo. Por otra parte, un ión libre sometido al mismo campo entrará en oscilación forzada, y en razón de su masa, su velocidad estará retrasada  $90^\circ$ ; la corriente debida a los iones estará, pues, en oposición con la corriente normal de desplazamiento, y todo pasará como si ésta, es decir, la constante dieléctrica, estuviera disminuída.

Para llegar hasta los valores numéricos, cuyo conocimiento es indispensable para las aplicaciones, consideremos un campo eléctrico

$$E = E_0 \cos \omega t$$

Si  $x$  es la abscisa de un ión,  $e$  su carga,  $m$  su masa, se tiene:

$$f = m x'' = E_0 \cos \omega t \times e \quad , \quad x'' = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t \quad ,$$

$$x = \frac{e}{m \omega} E_0 \operatorname{sen} \omega t = - \frac{e}{m \omega^2} \frac{dE}{dt}$$

Si hay  $N$  iones por centímetro cúbico, la corriente de conducción que producen es:

$$N e x' = - \frac{N e^2}{m \omega^2} \frac{dE}{dt}$$

Como la corriente de desplazamiento debida al poder inductor específico  $K$  es

$$\frac{K}{4 \pi} \frac{dE}{dt}$$

se ve que la corriente total será:

$$\left( \frac{K}{4 \pi} - \frac{N e^2}{m \omega^2} \right) \frac{dE}{dt}$$

o sea, que las cosas pasan como si la constante dieléctrica fuese

$$K' = K - N \frac{4 \pi e^2}{m \omega^2} \quad [109]$$

En esta fórmula, las unidades no están especificadas; si se emplean las electrostáticas se recordará que la constante dieléctrica de un gas es igual a 1; si se emplean las electromagnéticas es igual  $\frac{1}{C^2}$ .

Como las velocidades de propagación son inversamente proporcionales a la raíz cuadrada de las constantes dieléctricas [23], la velocidad de propagación  $C_2$  en el gas ionizado será:

$$C_2 = C_1 \sqrt{\frac{K}{K'}} = \frac{C_1}{\sqrt{1 - N \frac{4 \pi^2 e^2 c_1^2}{m \omega^2}}} = \frac{C_1}{\sqrt{1 - N \frac{e^2 \lambda^2}{2 \pi m}}} \quad (\text{U E M}) \quad [110]$$

De esta fórmula se deduce que en un medio dado la velocidad depende de la frecuencia.

*Refracción iónica.*—Acabamos de ver que la constante dieléctrica de un gas ionizado disminuye al aumentar la ionización, fórmula [109]. Si consideramos ahora la capa ionizada de la alta atmósfera se comprende que la densidad de ionización irá creciendo al aumentar la altura, produciendo, por consiguiente, una constante

disminución de la constante dieléctrica. Si a dicha capa llega una onda electromagnética, ésta irá refractándose sucesivamente, convirtiéndose la dirección de la propagación en una curva que se dirige nuevamente hacia la Tierra.

Como la variación de la constante dieléctrica no solamente depende de la variación de la ionización, sino también de la longitud de onda, se demuestra, por cálculos que no reproduciremos, que cesa de haber refracción y queda sólo reflexión en el caso de ondas largas.

84. *Explicación aproximada de los fenómenos observados.*— Después de lo que acabamos de decir, se concibe muy fácilmente cómo los rayos electromagnéticos desviados por la región ionizada de la alta atmósfera pueden dar lugar a los resultados de las experiencias. Consideremos primeramente el caso de las ondas cortas. Los rayos que, como 1 y 2 (fig. 76), parten en una dirección de dé-

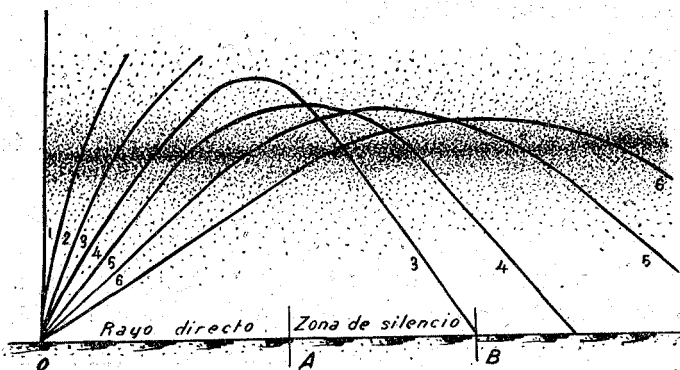


Fig. 76

Refracción de los rayos electromagnéticos en la alta atmósfera.

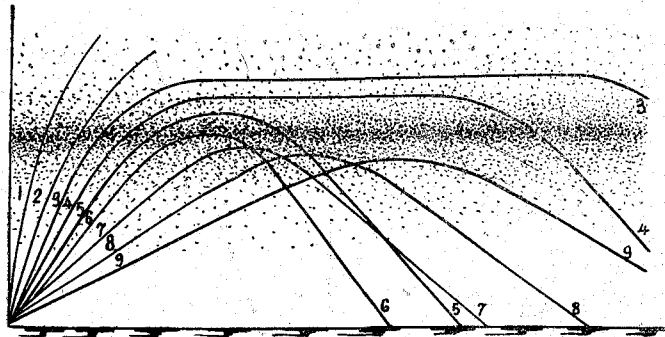
bil distancia cenital, abandonan las regiones ionizadas antes de haber alcanzado una curvatura suficiente para llevarlos al suelo; no es hasta la orientación 3, por ejemplo, cuando el retorno hacia la tierra es posible.

Por otra parte, el rayo horizontal se atenúa rápidamente al seguir la superficie del suelo, tanto más rápidamente cuanto que la frecuencia de la onda es mayor. Si se extingue completamente antes de haber alcanzado el punto en que el primer rayo de espacio llega al suelo, habrá una zona de silencio. Si se tiene en cuenta que el efecto producido sobre el coeficiente dieléctrico es tanto más débil cuanto que la onda es más corta, se observa que la anchura de la zona de silencio aumentará al disminuir la onda.



Para las ondas de frecuencias inferiores a 4.000 kc/s. ( $\lambda = 75$  metros) no hay zona de silencio; existen, pues, puntos del suelo en donde se reciben a la vez las dos ondas.

No es cierto que la distribución de las trayectorias de los rayos sea la que se representó en la figura 76. Lassen, fijando una cierta ley de variación de la ionización en función de la altura, ley derivada de la influencia que admite para los agentes ionizantes, encuentra una distribución representada por la figura 77. Para una cierta



*Trayectoria de los rayos refractados según Lassen.*

Fig 77

distancia cenital, los rayos caminarían en la alta atmósfera durante un gran recorrido; para las distancias un poco mayores, volverían al suelo muy cerca del punto de partida; después, el punto de retorno se alejaría a partir de una cierta inclinación.

En este caso, como en el precedente, habría zona de silencio. Esta comparación del comportamiento de los rayos según la ley de variación de ionización, muestra cómo los efectos obtenidos se modifican con las hipótesis introducidas; no hay, pues, que dar mucha importancia al detalle de los fenómenos, considerando únicamente éstos en su conjunto. Quizá, sin embargo, cuando se hayan desarrollado los medios de investigación será ocasión de volver sobre el detalle.

Los fenómenos son, por otra parte, más complejos que la descripción que acabamos de hacer, pues hasta a distancias muy débiles del emisor la observación permite descubrir la existencia de una onda de espacio enviada hacia la tierra, aun para ondas relativamente cortas. Los fenómenos de refracción están, pues, acompañados de una reflexión más o menos importante, como sucede en óptica.

Si pasamos ahora a las ondas largas, las consecuencias de la teoría precedente son más sencillas, la capa ionizada se comporta como un reflector y la refracción será reemplazada por la reflexión. Los resultados prácticos serán del mismo género; no habrá, naturalmente, zona de silencio.

Hemos razonado en el caso de un suelo plano. Se ve que, debido a la curvatura de la tierra, la mayor incidencia posible de un rayo en la capa  $K-H$  es la representada en  $i$  sobre la figura 78; para

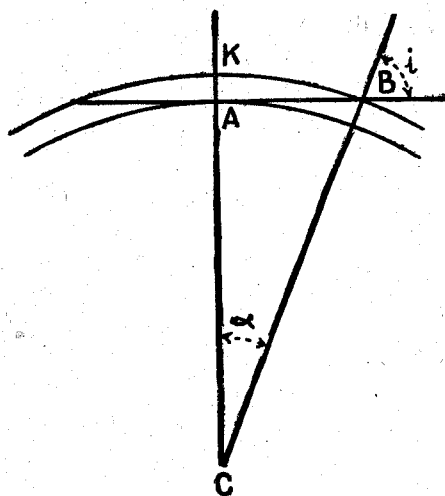


Fig. 78

una altura de 100 kilómetros, de esta capa, este ángulo es, próximamente,  $80^\circ$ . Se concibe entonces que ondas muy cortas no vuelvan a tierra, pues para estas ondas este ángulo correspondería a rayos insuficientemente desviados; hemos indicado que éste se producía para ondas inferiores a 10 ó 12 metros, aproximadamente.

La curvatura de la tierra tiene también influencia sobre la propagación de todas las ondas. Admitiendo una reflexión o una refracción como la esquematizada en la figura 76, el alcance máximo sería limitado al doble del ángulo  $\alpha$  de la figura 78 o a un valor ligeramente mayor, teniendo en cuenta la difracción. Para explicar los alcances superiores a este límite se puede suponer que la onda reenviada por la alta atmósfera se refleja en la tierra, después sufre un nuevo cambio de dirección en la alta atmósfera y así sucesi-

vamente; se puede suponer también que ciertos rayos siguen, según los resultados de Lassen, grandes trayectos en la alta atmósfera.

Las influencias de los días y las estaciones encuentran fácilmente su explicación en la elevación mayor o menor de la capa de  $K - H$ , si se admite que el agente principal de ionización está constituido por los rayos ultravioleta del Sol. En efecto, a medida que es más elevada esta capa, mayor es la distancia en la cual los rayos refractados vuelven a la tierra.

85. *Causa del efecto "Fading" y de las distorsiones.*—El efecto "Fading" puede provenir de varias causas. Cuando no existe zona de silencio, las ondas de superficie y de espacio, existen simultáneamente a una cierta distancia del emisor; puede entonces producirse entre estas dos ondas interferencias que amplifican el campo o, por el contrario, lo anulen, según las diferencias de marcha que existan entre las dos ondas. Si se tiene en cuenta la longitud del camino recorrido por ellas, se concibe fácilmente que una diferencia de marcha de media onda pueda introducirse frecuentemente, debido a una variación del medio atravesado. Es bien evidente, en efecto, que la capa  $K - H$  no tiene límites geométricos, ni una constitución homogénea; es muy comparable a una capa de nubes en la cual la densidad de las partículas líquidas está repartida de manera muy caprichosa y se encuentra en perpetuo cambio.

Se explica también que existen regiones de "Fading" máximo; son aquellas en donde las intensidades de los campos de las ondas de superficie y espacio son iguales.

Esta causa no puede ser ya tomada en consideración más allá de la distancia a la cual la onda de superficie está amortiguada totalmente; pero entonces se debe tener en cuenta las variaciones de atenuación que provienen de las variaciones de densidad de la capa ionizada.

Se debe tener, en fin, en cuenta (y la observación lo ha justificado), en razón de la irregularidad de los límites geométricos de las regiones ionizadas, varias ondas pueden llegar al mismo tiempo después de haber recorrido caminos diferentes.

Las causas precedentes dan todavía una explicación del "Fading selectivo". A lo largo de muy largos trayectos las diferencias de marcha de dos ondas muy próximas pueden ser muy diferentes y producir simultáneamente el refuerzo de una onda y la anulación de otra de frecuencia muy próxima.

La distorsión de la modulación radiofónica es una consecuencia

del "Fading selectivo"; puede resultar igualmente del desplazamiento relativo de dos o varias ondas próximas que hayan marchado con velocidades diferentes.

86. *Explicación de los ecos retardados.*—Este fenómeno inducido anteriormente permanece muy oscuro. Según Stormer, debe existir alrededor de la tierra, a una distancia de un gran número de radios terrestres, una especie de anillos de corpúsculos electrizados; los ecos retardados provendrán de la reflexión en dichos anillos de los rayos que hayan salido de la capa  $K-H$ .

La energía relativamente elevada de los ecos es una seria objeción a esta teoría.

## CAPITULO XII

### Propagación de las ondas en la superficie de la tierra.

87. *Propagación de las ondas en presencia del suelo.*—Hemos estudiado primeramente la propagación en la atmósfera, pues es la que juega el papel más importante en las comunicaciones actuales, y su estudio es independiente de lo que pasa cerca del suelo. Es necesario volver ahora sobre la influencia de la tierra, que es predominante a débiles distancias del emisor y que juega un papel capital para todas las aplicaciones militares en donde los puntos a alcanzar son relativamente poco alejados del emisor.

Para tratar el problema actual se puede, con una aproximación muy suficiente, despreciar completamente la influencia de la alta atmósfera y, además, suponer que la propagación se hace por encima de un suelo plano.

Tomemos un caso sencillo: el de la propagación de las ondas entretenidas emitidas por un manantial alejado del punto de observación. En este punto, la propagación debe hacerse por ondas casi planas. Admitamos que sea así y tomemos para eje de las  $x$  la dirección trazada en el suelo por la dirección de propagación.

Si el suelo fuera infinitamente conductor, la fuerza magnética  $\vec{H}$  estaría dirigida según el eje de las  $y$ , y la fuerza eléctrica  $\vec{h}$  sería vertical. Estos dos vectores están ligados por la relación

$$C \sqrt{\mu} \vec{H} = \sqrt{K} \vec{h} \quad [111]$$

y el vector de Poynting, perpendicular a los dos, estaría dirigido según  $o x$ .

Habría en la superficie misma del terreno una *capa de corriente* cuya densidad  $J$  estaría dada por la fórmula

$$H = 4 \pi J \quad [112]$$

Si suponemos ahora que la conductibilidad  $\sigma$  del terreno, en lugar de ser infinitamente grande es *finita*, pero sin ser demasiado pequeña, los resultados deben ser parecidos a los que acabamos de recordar. En particular, penetrando en la profundidad del terreno, en lugar de encontrar bruscamente un campo nulo, se debe tener, por continuidad, un campo eléctrico dirigido en el sentido de la corriente y proporcional a esta corriente.

Vamos a admitir en primera aproximación que pasa todo como si la corriente estuviera uniformemente repartida en profundidad en una capa de terreno igual a la que hemos llamado precedentemente la *profundidad de penetración de las ondas*, es decir, la cantidad

$$a = \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma \mu \omega}} \quad [113]$$

En esta hipótesis el campo eléctrico en el terreno estará dirigido según  $ox$  y se reducirá a una sola componente  $h_x$ ; la ley de Ohm da:

$$h_x = \frac{J}{\sigma a} = J \sqrt{\frac{2 \pi \mu \omega}{\sigma}} \quad [114]$$

Teniendo en cuenta la igualdad [112], después la relación [111], la expresión de  $h_x$  se convierte:

$$h_x = h \sqrt{\frac{K \omega}{8 \pi \sigma c}} \quad [115]$$

Pero resulta de las condiciones generales de continuidad que la componente tangencial del campo eléctrico no cambia de valor en la travesía de la superficie de separación de los dos medios, como existe en la tierra una componente horizontal  $h_x$ , esta componente existe también con el mismo valor *en el aire*, a ras del suelo.

Observamos entonces que el campo eléctrico no es ya vertical. A su componente vertical, que conserva aproximadamente el mismo valor que para un suelo infinitamente conductor, hace falta añadir una componente horizontal  $h_x$  cuyo *orden de magnitud* está dado por la fórmula [115].

La tangente de la inclinación  $\alpha$  del campo eléctrico respecto de

la vertical está medida por la relación de las dos componentes, y deduciremos de la fórmula [115] la expresión  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_x}{h} = \sqrt{\frac{K \omega}{8 \pi \sigma c}} \quad [116]$$

88. *Consecuencias de estas fórmulas.*—Las ondas que se deslizan por la superficie del suelo no son, pues, verticales; se inclinan hacia adelante un ángulo igual a  $\alpha$ .

El flujo de energía, que es perpendicular a la fuerza eléctrica, está, a su vez, desviado por efecto de la resistencia del suelo. Definido por el vector de Poynting, el *rayo Hertziano*, en lugar de ser horizontal, llega hacia el suelo inclinado ligeramente hacia abajo. Durante todo el trayecto, el suelo absorbe energía de las ondas, llegando éstas más debilitadas de lo que creíamos.

Por encima de la superficie del mar, la inclinación de las ondas es siempre muy débil. Si suponemos que el agua del mar tiene una resistividad de 30 ohms.-cm., la inclinación, que crece con la *frecuencia*, no alcanza ni un *grado* para las longitudes de onda más cortas.

La inclinación no alcanza más que algunos grados en el caso de la propagación de pequeñas longitudes de ondas sobre terrenos extremadamente resistentes.

89. *Fórmula de Austin.* — Austin realiza, desde hace más de quince años, observaciones diarias de las potentes estaciones intercontinentales de gran longitud de onda, y deduce de sus medidas una fórmula empírica, que se aplica a las grandes ondas, habiendo hecho un trayecto por encima del mar, suponiendo alumbrado todo el recorrido por el Sol. Aplicada en estas condiciones, da resultados generalmente bastante buenos, pero que pueden diferir del 50 al 100 por 100 en más de los resultados de la práctica. Cuando el camino de las ondas es por la noche, los resultados de las medidas son notablemente más elevados que las del cálculo cuatro o cinco veces, por ejemplo. Hé aquí esta fórmula bajo la última forma indicada por el autor:

$$h^m = 120 \pi \frac{h_r^m I \operatorname{amp}}{\lambda^{Km} r^{Km}} \sqrt{\frac{\Theta}{\operatorname{sen} \Theta}} e^{-\frac{0,0014 r^{Km}}{(\lambda^{Km})^{0,6}}} \quad [117]$$

$h_r$  es la altura de radiación de la antena;  $I$ , la corriente máxima;  $r$ , la distancia, y  $\Theta$ , el ángulo del centro de la Tierra, cuyo arco es la línea que une el emisor con el receptor.

Escrita en función de la potencia radiada  $W$ :

$$h \frac{\mu V}{m} = 3.10^5 \frac{\sqrt{W K_w}}{r K m} \sqrt{\frac{\Theta}{\text{sen } \Theta}} e^{-\frac{0,0014 r K m}{(\lambda K m)^{0,6}}} \quad [118]$$

Se observará que la fórmula [117] no es otra que la de propagación de un dipolo sobre un suelo perfectamente conductor, a la cual se ha añadido un término exponencial para tener en cuenta la absorción y un término  $\sqrt{\frac{\Theta}{\text{sen } \Theta}}$  que se introduce en razón de la curvatura de la Tierra.

Resulta de un cierto número de observaciones que esta fórmula, establecida para ondas largas, da todavía resultados admisibles para las ondas medias; el grado de precisión por encima del mar parece ser que es el mismo.

Para aplicarla por encima de la Tierra se ha buscado reemplazar el coeficiente numérico del exponente de la exponencial por números diferentes, cuyos valores vamos a dar a continuación.

90. *Valores del coeficiente exponencial para terrenos diversos.*— Tomando para término exponencial de las fórmulas [117] y [118] la expresión

$$e^{-\frac{\alpha r K m}{\sqrt{\lambda K m}}}$$

los valores de  $\alpha$  para diferentes terrenos han sido determinados por numerosas observaciones, y los resultados no han sido muy concordantes, pudiendo indicarse los valores medios siguientes como aproximados:

0,0015 sobre el mar.

0,01 a 0,025 sobre terrenos bien despejados, según su naturaleza.

0,06 sobre terreno cubierto de edificios, aglomeración urbana.

Por todo lo que vamos diciendo en este capítulo vemos que el campo electromagnético se debilita no solamente en razón inversa de la distancia, como habíamos visto en el del dipolo, sino que, además, interviene el factor exponencial; es decir: prescindiendo de la curvatura de la Tierra, podemos poner:

$$\frac{\text{Campo a la distancia } r}{\text{Campo a 1 kilómetro}} = \frac{1}{r \cdot e^{\frac{\alpha r}{\sqrt{\lambda}}}} \quad [119]$$

este debilitamiento se evalúa habitualmente en escalas logarítmicas; por ejemplo, en *T. U.* (decibelios) (\*).

$$\text{Debilitamiento del campo en decibelios} = 20 \log r + 8.68 \frac{\alpha r}{\sqrt{\lambda}}$$

y se puede representar este debilitamiento del campo por las curvas de la figura 79 para longitudes de onda de 400 metros a 1.600

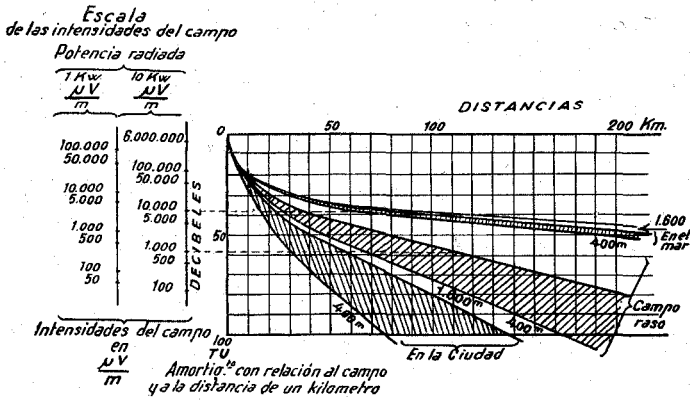


Fig. 79

metros, y para los tres valores de  $\alpha$ : sobre mar, sobre campo raso o en las aglomeraciones urbanas.

Con este gráfico se puede determinar el alcance de una emisora; para ello bastará, con ayuda de las fórmulas de Austin, graduar las ordenadas en  $\mu v./m$ . En el gráfico adjunto se ha hecho esto para las potencias emisoras de 1 y 10 K. W. Por ejemplo: si se quiere para una recepción de calidad un campo de 10.000  $\mu v./m$ ., el alcance de una emisora de 10 K. W. en las mejores condiciones sería de 80 kilómetros; en las peores, de 20 kilómetros. Si basta con 1.000  $\mu v./m$ ., el alcance en rasa campaña sería de 110 kilómetros para  $\lambda = 1.600$  metros, y de 70 kilómetros para  $\lambda = 400$  metros.

91. *Los obstáculos.*—Hasta aquí hemos admitido que las ondas se propagan entre el emisor y el receptor sin otro obstáculo que la absorción por el suelo y la curvatura de la Tierra.

Ahora bien: esto es un caso límite. En general, la onda se debilita todavía en su recorrido por desniveles del suelo, por travesía de zonas de bosque, de aglomeraciones urbanas, etc. Por otra parte, el

(\*) El T. U. o unidad de transmisión vale 20 veces el logaritmo decimal de  $n$ , siendo  $n$  la inversa de la relación de intensidades en el punto de partida y el de llegada. Esta unidad se llama también *decibel*.



colector de ondas no se eleva en medio de un desierto, sino a la proximidad o hasta el interior de edificios más o menos conductores.

¿Cuál es la influencia de estos obstáculos? Es lo que vamos a ver a continuación.

*Onda en contacto con un conductor.*—Al contacto de un conductor, la onda cesa de propagarse libremente. El campo eléctrico obra sobre los electrones libres del conductor que se ponen en movimiento: hay corriente inducida.

El efecto de esta corriente sobre el campo primitivo depende evidentemente de su fase, es decir, de las dimensiones del conductor y de su acuerdo, si lo hay.

En el caso muy particular de antena acordada, es decir, de corriente inducida en fase con la f. e. m., el campo eléctrico se encuentra reforzado detrás de la antena (del lado opuesto del emisor), desapareciendo este refuerzo a medida que se aleja de la antena; por delante y en los costados hay zonas alternativas de refuerzo y de debilitamiento. Respecto al campo magnético hay refuerzo delante de la antena y disminución detrás.

En general, el obstáculo encontrado no satisfará a esta condición; tendrá un período propio distinto del de su onda. Podrá, por otra parte, constituir un circuito abierto análogo a una antena, o bien un circuito cerrado análogo a un bucle de hilo. A continuación discutiremos estos dos casos.

*Obstáculo lineal de débiles dimensiones.* — Supongamos un obstáculo conductor vertical y delgado, de débil altura, con relación a la longitud de la onda; este caso será, por ejemplo, un poste metálico, un árbol, etc.

La f. e. m. inducida estará en fase con el campo eléctrico; por otra parte, la reactancia proviene sobre todo de la capacidad que es débil; la corriente está, pues, avanzada sobre la f. e. m.; el campo eléctrico debido a esta corriente está avanzado (a pequeña distancia) respecto de la corriente. Si la resistencia es, pues, despreciable, estos dos avances iguales a  $\frac{\pi}{2}$  producirán una oposición de fase; el obstáculo debilita el campo eléctrico en su proximidad.

El campo magnético radiado por el obstáculo está en fase con la corriente; se encuentra, por consiguiente, en cuadratura con el campo primario en la proximidad del obstáculo; el campo magnético total está, pues, aumentado en magnitud, pero desviado.

Si se aleja del obstáculo, las relaciones de fase se hacen compli-

cadadas y variables, según las direcciones; al ser la corriente inducida pequeña, estos efectos, que se debilitan rápidamente, resultan despreciables.

*Obstáculo formando circuito cerrado de débiles dimensiones.*— Es el caso de un bucle de hilo de una red de canalizaciones metálicas, de un enrejado, etc.

Los resultados son entonces muy diferentes. La f. e. m., siendo debida a la acción diferencial del campo sobre las diversas partes del circuito, está retrasada  $\frac{\pi}{2}$  sobre él, pero esta vez es la autoinducción del circuito la que constituye la principal reactancia; por consiguiente, la corriente está retrasada  $\frac{\pi}{2}$  sobre la f. e. m. Como consecuencia, es ahora el campo magnético secundario el que está en oposición con el campo primario, en tanto que los dos campos eléctricos están en cuadratura. En la proximidad inmediata del obstáculo el campo magnético está muy debilitado, el campo eléctrico desviado.

*Obstáculo de grandes dimensiones* (con relación a la longitud de onda). Para las ondas largas este obstáculo no puede ser más que montañas. Para las ondas cortas y extracortas muchos obstáculos pueden ser considerados como tales, y, sobre todo, los edificios metálicos.

Se sabe entonces que el obstáculo se comporta sencillamente como un reflector; por delante, el campo es reforzado y desviado, pueden producirse ondas estacionarias; por detrás, está debilitado; es la teoría de los espejos y las pantallas.

92. *Aplicación a los obstáculos usuales.* — Estas condiciones teóricas se aplican fácilmente a los diferentes casos prácticos, y ha dado lugar a verificaciones experimentales satisfactorias.

*Postes, árboles, bosques, etc.*—Como hemos dicho, éstos realizan el tipo de dipolo no acordado para la mayor parte de las ondas usuales.

Así se observa una disminución muy marcada del campo eléctrico y una desviación del campo magnético en la proximidad inmediata de los postes metálicos.

Los árboles, peores conductores, dan disminuciones de 20 a 30 por 100 de  $\vec{h}$  y desviaciones de 5 a 10° en  $\vec{H}$ ; el efecto es más marcado durante la estación de verano, en que los árboles, llenos de savia, son mejores conductores.

Cuando los árboles están agrupados, el campo puede ser debili-

tado sobre toda la superficie. Se ha llegado a concretar en cifra este debilitamiento diciendo que es, como si la conductibilidad del suelo estuviera dividida por 10 ó 20.

Los postes de madera no producen ningún efecto, aunque estén mojados por la lluvia.

*Casas, edificios, grupos de inmuebles.*—Los inmuebles obran, a la vez, y en proporciones variables, como obstáculos *abiertos* o *cerrados*. La conductibilidad de los muros produce el primer efecto; el campo eléctrico es debilitado.

Por ejemplo, bajo un simple tejado de un barracón la disminución de  $h$  será de 10 por 100 para tiempo seco, 30 por 100 después de la lluvia. En una casa será, por término medio, del orden del 50 por 100 en el piso debajo del tejado; un piso más abajo, el campo se reducirá al tercio de su valor.

La disminución sería todavía sensible fuera de la casa, hasta una distancia de dos o tres veces su altura.

En todos los casos, el campo magnético no se debilitará.

Por el contrario, puede suceder también, debido a las canalizaciones metálicas de todas clases de los entramados metálicos, hormigón armado, etc., que las casas pueden obrar también como circuitos cerrados, y el campo magnético puede estar disminuido. Se ha observado una reducción a la mitad en una casa normal y hasta un centésimo en el piso bajo de un rascacielos americano. Estos enormes inmuebles hacen sentir su efecto perjudicial a gran distancia; proyectan una *sombra* detrás de ellos. El ejemplo típico es el del barrio de Mahattan Island, en Nueva York, en todo el cual el campo se reduce al décimo de su valor normal. Ya vimos anteriormente que en la propagación de las ondas por encima de aglomeraciones urbanas el valor de  $\alpha$  debe ser 0.06 en lugar de 0,025, en pleno campo.

*Montañas, escarpados, costas, etc.*—La configuración geográfica del suelo influye, naturalmente, sobre la intensidad del campo electromagnético. Detrás de las montañas hay disminución, habiéndose llegado a comprobar que detrás de una montaña de 500 metros de altura el campo se reduce al cuarto o quinto de su valor.

Los escarpados no modifican apenas el valor del campo, pero obran sobre la orientación del mismo; de igual modo una onda, llegando oblicuamente del mar a la tierra, sufrirá una especie de refracción y se determinará erróneamente su azimut.

93. *Propagación de ondas extracortas.* — Hemos visto que las ondas extracortas no podían llegar muy lejos porque son insuficien-

temente refractadas por la capa  $K-H$ . Son también muy absorbidas por el suelo; además, las propiedades dieléctricas de este último empiezan a tener papel, y debido a esto tiende a disminuir considerablemente la intensidad del campo en la proximidad de la tierra. Por estas dos razones, las ondas de algunos metros se propagan muy mal a lo largo de la tierra; la misma potencia, que da excelentes comunicaciones telefónicas en las condiciones indicadas a continuación, es totalmente absorbida a algunos centenares de metros a ras del suelo.

Estas ondas vuelven a ser ventajosas cuando su emisión y su recepción se hacen entre puntos tales que las ondas caminen lejos del suelo; es el caso en países montañosos entre vértices de colinas.

Estas ondas se propagan casi como la luz y contornean apenas los obstáculos de tal suerte que la línea, uniendo el emisor y el receptor, no debe encontrar la tierra. Estos dos puntos deben ser *visibles* uno del otro; esta expresión se aplica al caso de tiempo claro que no absorba la luz. Las ondas no son detenidas por la bruma como las ondas luminosas, por cuya razón son más ventajosas para las comunicaciones en países montañosos. Como estas ondas no sufren ninguna absorción en el aire, bastan potencias extremadamente débiles para alcanzar grandes distancias. Se pueden establecer fácilmente pequeñas estaciones portátiles alimentadas por pilas, que radiando una potencia del orden de una fracción del vatio dan excelentes comunicaciones telefónicas a distancias de 100 a 150 kilómetros. Las antenas, siendo muy pequeñas, son absolutamente insensibles a los parásitos atmosféricos y las comunicaciones pueden tener lugar aun con fuertes tormentas.

Por último, la pequeña longitud de las ondas permiten instalar sistemas directivos poco voluminosos que concentren la energía y aumenten el secreto de las comunicaciones; esto se realiza, en gran parte, por no poder pasar las ondas del horizonte.

Las ondas que parecen más cómodas actualmente para tales utilidades son las ondas de tres metros, pero es casi seguro que cuando se puedan producir fácilmente las de 15 centímetros éstas serán las que se aplicarán para estos fines.

Indiquemos, como aplicación de las ondas extracortas, la instalación de comunicaciones telefónicas entre Francia y Córcega con ondas de seis metros; se han aprovechado dos elevaciones de las costas para emplear estas ondas extracortas, discretas y al abrigo de perturbaciones atmosféricas.